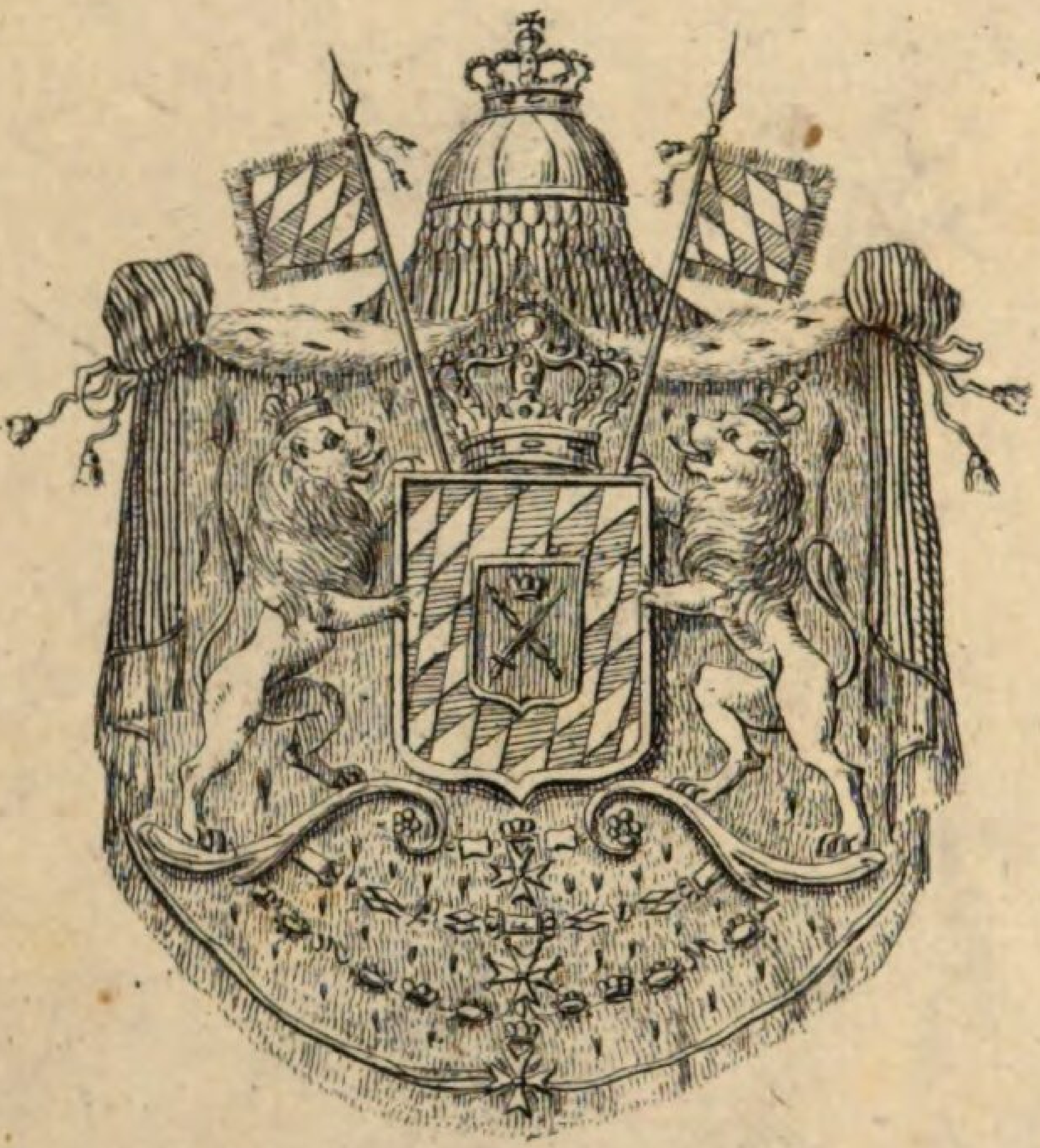
Math. p.
580 e



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

Lehrbuch
der
Geometrie

von

Dr. Ernst Tillich,
Professor und Mitvorsteher der Erziehungs- und Lehranstalt
zu Dessau.

Zum mathematischen Lehrcyklus
gehörig.

Mit 16 Kupfern.

Leipzig, 1807.
bey Heinrich Gräff.

508

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

So wie das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse ein stufenweises Fortschreiten von dem Anschauen des Zählbaren bis zur reinen Zahlencombination, darzustellen versuchte, so ist es Zweck des Lehrbuchs der geometrischen Verhältnisse, von dem Auffassen und Synthesiren der Form stufenweise bis zur völligen Abstraction räumlicher Verhältnisse fortzuschreiten. Da werden sich Arithmetik und Geometrie die Hände reichen, und die erstere wird nach den Resultaten der letztern den praktischen Gebrauch vielfach bewähren.

Es schien vorzüglich nothwendig, Ordnung in das Ganze zu bringen, und deswegen

das Mannigfaltige zu sondern, das Gleichartige zusammenzustellen.

Das Auffassen und die Construction der Gestalten mußte allem übrigen vorangehen. Dann erst konnte zu den Wahrheiten fortgeschritten werden, die für uns daraus hervorgehen. So wie bei der Construction der Längen der Punkt das erste Element ist, so enthält in Ansehung der Combination der Formelemente, der Winkel, als Vereinigungspunkt zweier Linien, das einfachste Verhältniß. Diesem zunächst setze ich die Linie. In der Verhältnißlehre nimmt daher die Betrachtung derselben den zweiten Platz ein. Dann erst schien es natürlich zur Fläche zu schreiten.

Da das geometrische Lehrbuch durchaus nur für den praktischen Gebrauch bestimmt ist, so wird man hier keine Auseinandersetzung der Gründe mancher Anordnungen und Abweichungen von dem Gewöhnlichen erwarten. Sie sollen aber deshalb nicht zurück bleiben, und werden am besten in einer wissenschaftlichen

Darstellung und Classification des mathematischen Lehrcyklus ihren Platz finden. Man vergesse übrigens nie, daß bei Lehrbüchern Methodik Hauptsache seyn und bleiben müsse.

Da eine Abwesenheit des Verf. von dem Druckorte, und mancherlei Unterbrechungen, die in dem Drange der Zeit lagen, einige wesentliche Verbesserungen und Berichtigungen nothwendig machten, so bitte ich, dieselben vor dem Gebrauche des Buchs zu beachten.

Zu dem 5ten Cursus gehört ein kleiner stereometrischer Apparat, den sich, nach der Beschreibung der Körper, die gegeben ist, jeder selbst leicht verfertigen lassen, oder auch in billigen Preisen durch den Verleger erhalten kann.

Der ganze Apparat besteht aus folgenden Stücken:

a) aus 27 Kubikzollen;

(8 reichen zur Noth auch aus. Kann man indeß ohne Mühe 64 haben, so ist es desto besser.)

b) Ein vierkantiges Prisma; dessen Seitenflächen ohngefähr 4 Zoll Höhe und 2 Zoll Breite haben können. Dieses Prisma ist nach der Beschreibung 226. 3. zerschnitten. Aus Holz läßt es sich am leichtesten arbeiten, wenn man gleich drei gleiche Pyramiden macht. Die Grundfläche einer jeden ist ein Quadrat, und kann 4 Quadratzoll enthalten. Die eine Kante geht gerade aufrecht in die Höhe (4 Zoll); an den höchsten Punkt oben kommt die Spitze. Zu der laufen die andern Kanten schräge auf, so daß die beiden an der senkrechten Kante befindlichen Flächen die Flächen rechtwinkliger Dreiecke darstellen, von welchen dieselbe Kante die gemeinschaftliche Hypothenuse ist. Die beiden entgegenstehenden Flächen sind ebenfalls Flächen rechtwinkliger Dreiecke, die schief liegen. Von der Ecke der Grundfläche, die dem untersten Punkte der senkrechten Seite entgegensteht, geht eine schräge Linie in die Spitze der Pyramide. Diese ist die gemeinschaftliche Hypothenuse der beiden schiefliegenden Dreiecksflächen.

c) Einen Cylinder.

d) Einen Kegel.

Beide müssen mit

e) einer Halbkugel (eine Kugel wird in zwei gleiche Theile getheilt) gleiche Grundfläche und Höhe haben. Ich habe den Diameter der Kugel gewöhnlich 6 Zoll nehmen lassen. Dann beträgt die Höhe der Halbkugel, des Cylinders und des Kegels drei Zoll, der Diameter der Grundflächen natürlich ebenfalls 6 Zoll.

Die eine Halbkugel lasse man noch einmal mit der Grundfläche parallel durchschneiden, ohngefähr in der Mitte, so daß also die Höhe der daraus entstehenden Zone $1\frac{1}{2}$ Zoll beträgt.

f) Eine vierkantige Pyramide deren Grundfläche 16 Quadratzoll, also jede Seite der Grundfläche 4 Zoll Länge enthält. Die Höhe nehme man 12 Zoll. Diese stümpele man in der Höhe von 6 Zoll (d. h. man durchschneidet sie in der Mitte mit der Grundfläche parallel). Die ganze Pyramide nenne man aac; den abgeschnittenen Theil bbd.

Dazu gehören noch

d) folgende 3 Pyramiden.

1) die Grundfläche der ersten ist auch 16 Quadratzoll, die Höhe aber nur 6 Zoll (aac — d).

2) Die Grundfläche der zweiten ist 8 Quadratzoll (eine jede Seite dieser Grundfläche beträgt 2 Zoll 11 Linien. Ein Zoll zu 12 Linien. Die Höhe ebenfalls 6 Zoll (abc — d).

3) Die Grundfläche der dritten ist 4 Quadratzoll (jede Seite 2 Zoll) die Höhe auch 6 Zoll (bbc — d).

Das Verhältniß dieser vier Pyramiden muß durchaus bleiben, wenn man auch die Größe ändert.

Dessau am 6 November 1806.

Der Verfasser.

Des

Lehrbuchs

der

geometrischen Verhältnisse

erste Abtheilung.

Erster Cursus

enthaltend

die Uebung im elementarischen Auffassen der geometrischen Formen.

I. Punkte.

§. 1. Tab. I. Fig. 1.

Zwei Punkte, die neben einander liegen. Der erste Punkt liegt links neben dem zweiten; der zweite Punkt liegt rechts neben dem ersten.

§. 2. Fig. 2.

Zwei Punkte, die über einander liegen. Der erste Punkt liegt unter dem zweiten; der zweite Punkt liegt über dem ersten. Derjenige Punkt, welcher über einem andern liegt, heißt der oberste Punkt, und der, welcher unter einem andern liegt, heißt der unterste.

§. 3. Fig. 3.

Zwei Punkte, welche weder über, noch neben einander liegen. Der erste Punkt liegt links unterwärts dem zweiten; der zweite Punkt liegt rechts oberwärts dem ersten.

Anmerkung. Umgekehrt können die beiden Punkte auch so gestellt werden, daß der erste rechts unterwärts dem zweiten, und dieser links oberwärts dem ersten liegt. Auch muß erwähnt werden, daß und wie die Bestimmung sich ändert, wenn der oberste Punkt der erste, der unterste der zweite genannt wird.

§. 4. Fig. 4.

Drei Punkte, welche neben einander liegen. Der erste Punkt liegt links neben dem zweiten;

der zweite liegt rechts neben dem ersten und links neben dem dritten, oder zwischen dem ersten und dritten; der dritte Punkt liegt rechts neben dem zweiten. Der Punkt, welcher zwischen zwei andern in der Mitte liegt, heißt der mittlere.

§. 5. Fig. 5.

Drei Punkte, welche über einander liegen. Der erste Punkt liegt unter dem zweiten und dritten; der zweite Punkt liegt unter dem dritten und über dem ersten, oder zwischen dem obersten und untersten; der dritte Punkt liegt über dem zweiten und ersten.

§. 6. Fig. 6.

Drei Punkte, welche weder über, noch neben einander liegen. Der erste Punkt liegt links unterwärts dem zweiten und dritten; der zweite Punkt liegt rechts oberwärts dem ersten, und links unterwärts dem dritten, oder zwischen dem ersten und dritten; der dritte Punkt liegt rechts oberwärts dem zweiten und ersten.

Anmerkung. Dieselben verschiedenen Ansichten, die §. 3. darbot, sind auch hier möglich, und müssen vom Lehrer nachgewiesen werden.

§. 7. Fig. 7.

Drei Punkte, von welchen zwei neben einander liegen, und der dritte oberwärts zwischen den beiden ersten liegt. Der erste Punkt liegt links neben dem zweiten, und links unterwärts dem dritten; der zweite Punkt liegt rechts neben dem ersten, und rechts unterwärts dem dritten; der dritte liegt rechts oberwärts dem ersten, und links oberwärts dem zweiten, oder oberwärts zwischen dem ersten und zweiten.

§. 8. Fig. 8.

Drei Punkte, von welchen zwei neben einander liegen, und der dritte unterwärts zwischen den beiden ersten liegt.

Anmerkung. Es ist leicht, auch hier, so wie bei den beiden folgenden Figuren, alle die möglichen Bestimmungen der Lage von den drei Punkten anzugeben, und es wird daher dem Lehrer überlassen.

§. 9. Fig. 9.

Drei Punkte, von welchen zwei über einander liegen, und der dritte rechts seitwärts zwischen den beiden ersten liegt.

§. 10. Fig. 10.

Drei Punkte, von welchen zwei über einander liegen, der dritte aber links seitwärts zwischen den beiden ersten liegt.

§. 11. Fig. 11.

Vier Punkte, von welchen je zwei und zwei neben, und je zwei und zwei über einander liegen. Der erste Punkt liegt links neben dem zweiten, und unter dem dritten, und links unterwärts vom vierten; der zweite Punkt liegt rechts neben dem ersten, unter dem vierten, und rechts unterwärts vom dritten; der dritte Punkt liegt links neben dem vierten, über dem ersten, und links oberwärts vom zweiten; der vierte Punkt liegt rechts neben dem dritten, über dem zweiten, und rechts oberwärts vom ersten.

§. 12. Fig. 12.

Fünf Punkte, von welchen je zwei und zwei neben, je zwei und zwei über und unter einander liegen, und der fünfte zwischen den vier ersten mitten inne liegt. Der erste Punkt liegt links neben dem zweiten, unter dem dritten, und links

unterwärts vom fünften u. s. w. *); der fünfte Punkt liegt rechts oberwärts vom ersten, links oberwärts vom zweiten, rechts unterwärts vom dritten, und links unterwärts vom vierten; ferner oberwärts zwischen dem ersten und zweiten, unterwärts zwischen dem dritten und vierten, rechts seitwärts zwischen dem ersten und dritten, und links seitwärts zwischen dem zweiten und vierten, oder zwischen allen vier Punkten mitten inne oder in der Mitte. — Ein Punkt, der zwischen mehrern Punkten in der Mitte liegt, heißt der **Mittelpunkt**.

II. Linien.

A. Gerade Linien.

§. 13. Fig. 13.

Eine gerade Linie, welche zwei neben einander liegende Punkte verbindet, heißt eine **horizontale** oder **wagerechte** Linie.

§. 14. Fig. 14.

Eine gerade Linie, welche zwei über einander liegende Punkte verbindet, heißt eine **senkrechte**, oder **lothrechte**, oder **perpendikulare** Linie.

§. 15. Fig. 15, 16, 17 und 18.

Eine gerade Linie, welche zwei weder neben, noch über einander liegende Punkte verbindet, heißt eine **schräge** Linie. Wenn eine gerade Linie von einem rechts unterwärts liegenden Punkte zu dem links oberwärts liegenden steigt, so heißt sie eine **linkssteigende** Linie (Fig. 15). Eine gerade Linie, welche von einem links unterwärts liegenden Punkte zu dem rechts oberwärts liegenden

*) Eben so werde die Lage des zweiten, dritten und vierten Punktes, wie im vorigen §, bestimmt.

steigt, heißt eine rechtssteigende Linie (Fig. 16). Eine gerade Linie, welche von einem rechts oberwärts liegenden Punkte zu dem links unterwärts liegenden fällt, heißt eine linksfallende Linie (Fig. 17). Eine gerade Linie, welche von einem links oberwärts liegenden Punkte zu dem rechts unterwärts liegenden fällt, heißt eine rechtsfallende Linie (Fig. 18). Alle rechts und links steigende und alle rechts und links fallende Linien sind schräge Linien.

B. Krumme Linien.

§. 16. Fig. 19 — 30.

Eine krumme Linie, welche sich in einem Bogen von einem Punkte zum andern zieht, heißt eine bogenförmige Linie. Eine Linie, welche von einem zweier neben einander liegenden Punkte zum andern in einem Bogen läuft, heißt eine horizontal-bogenförmige Linie. Sie kann entweder oberwärts gebogen (Fig. 19), oder unterwärts gebogen seyn (Fig. 20).

Eine Linie, welche von dem einen zweier über einander liegenden Punkte zum andern in einem Bogen läuft, heißt eine senkrecht-bogenförmige Linie. Sie ist entweder rechts auswärts gebogen (Fig. 21), oder links auswärts gebogen (Fig. 22).

Eine Linie, welche von dem einen zweier weder über, noch neben einander liegenden Punkte zum andern in einem Bogen läuft, heißt eine schräg-bogenförmige Linie. Die schräg-bogenförmigen Linien sind entweder rechts oder links steigend bogenförmig (Fig. 23 und 24), oder rechts oder links fallend bogenförmig (Fig. 25 und 26); und alle diese können wieder entweder rechts auswärts gebogen (Fig. 23 — 26), oder links auswärts gebogen seyn (Fig. 27 — 30).

Anmerk. Zur Uebung muß auch hier der Lehrer jede Art von schräg-bogenförmigen Linien von dem Schüler bestimmen lassen, nach folgendem Beispiel: Eine Linie, welche von einem links unterwärts liegendem Punkte zu einem rechts oberwärts liegenden in einem Bogen steigt, heißt eine rechtssteigende bogenförmige Linie.

§. 17. Fig. 31 — 36.

Eine krumme Linie, welche sich von einem Punkte zum andern schlängelt, heißt eine schlängliche, oder schlangenförmige, oder Schlangenlinie.

Eine Linie, welche von einem zweier neben einander liegenden Punkte zum andern sich schlängelt, heißt eine wagerecht-schlangenförmige Linie (Fig. 31).

Eine Linie, welche von einem zweier über einander liegenden Punkte zum andern sich schlängelt, heißt eine senkrecht-schlangenförmige Linie (Fig. 32).

Eine Linie, welche sich von einem zweier weder über, noch neben einander liegenden Punkte zum andern schlängelt, heißt eine schrägschlangenförmige Linie.

Die schrägschlangenförmigen Linien sind entweder rechts oder links steigend (Fig. 33 und 34), oder rechts oder links fallend (Fig. 35 und 36).

(Vergl. die Anmerk. des vorigen §.)

Anmerk. Die Schlangenlinien sind auch außer ihrer horizontalen oder senkrechten oder schrägen Richtung durch die Anzahl und die Richtung ihrer Beugungen verschieden. Sie können zwei, drei, vier, fünf und mehrere Krümmungen haben, und ihre erste Krümmung kann oberwärts oder unterwärts gebogen, rechts auswärts oder links auswärts gebogen seyn. Verschiedene Aufgaben und Uebungen darin gehören aber zu dem mathematischen Zeichnen.

C. Parallellinien.

§. 18. Fig. 37 — 52.

Linien, welche überall einen gleichen Raum zwischen sich haben, sind in allen Punkten gleich weit von einander entfernt, laufen in gleicher Richtung, und heißen gleichlaufende oder Parallellinien.

1) Gerade Parallellinien.

§. 19. Fig. 37 — 42.

Zwei wagerechte Linien, welche überall gleich weit von einander entfernt sind, laufen in gleicher Richtung, und heißen wagerechte Parallellinien. (Fig. 37).

Zwei senkrechte Linien, welche überall gleich weit von einander entfernt sind, laufen in gleicher Richtung, und heißen senkrechte Parallellinien (Fig. 38).

Zwei rechtssteigende Parallellinien *) (Fig. 39).

Zwei linkssteigende Parallellinien (F. 40).

Zwei rechtsfallende Parallellinien (F. 41).

Zwei linksfallende Parallellinien (F. 42).

2) Krumme Parallellinien.

§. 20. Fig. 41 — 52.

Zwei wagerecht-bogenförmige Parallellinien, und zwar zwei oberwärts gebogene (F. 43), und zwei unterwärts gebogene (Fig. 44).

*) Der Lehrer lasse auch hier die nähern Bestimmungen, wie oben, vom Schüler hinzufügen, damit sich durch die öftere Wiederholung der Form der Begriff der Parallelität tief einpräge.

Zwei senkrecht-bogenförmige Parallellinien, und zwar zwei rechts auswärts (Fig 45), und zwei links auswärts gebogene (Fig 46).

Zwei rechtssteigende bogenförmige Parallellinien (Fig. 47).

Zwei linkssteigende bogenförmige Parallellinien (Fig. 48).

Zwei rechts- (Fig. 49) und zwei linksfallende bogenförmige Parallellinien (Fig. 50).

Eben so giebt es wagerecht-schlangenförmige (Fig. 51), senkrecht schlangenförmige (Fig. 52), und schräg schlangenförmige Parallellinien (Fig. 53), und diese letztern können rechts- oder linkssteigend, rechts- oder linksfallend seyn.

D. Proportionallinien.

§. 21. Fig. 54 und 55.

Drei Linien, von welchen eine immer größer ist, als die andre. Die zweite ist ein halb Mal größer, als die erste, und die dritte ist ein halb Mal länger, als die zweite. So viel Theile die erste Linie von der zweiten enthält, so viel Theile enthält auch die zweite von der dritten; oder so wie sich die erste zur zweiten verhält, so verhält sich die zweite zur dritten; daher heißen diese drei Linien Verhältniß- oder Proportionallinien. Die zweite Linie ist die mittlere Proportionallinie, oder die Linie, welche mit beiden Linien im Verhältniß steht, oder zu der sich die erste so, wie sie zur zweiten verhält (Fig. 54).

Vier gerade Linien von ungleicher Größe. Die erste enthält von der zweiten eben so viel Theile, als die dritte von der vierten, oder die zweite ist um ebendenselben Theil der ersten Linie größer, um welchen die vierte größer ist, als die dritte. Diese Linien stehen ebenfalls mit einander im Verhältniß, und heißen Proportionallinien (Fig. 55).

E. Sich nähernde Linien.

§. 22. Fig. 56 — 61.

Eine senkrechte Linie, deren unterster Punkt sich dem Anfangspunkte einer wagerechten Linie nähert (Fig. 56).

Eine linksfallende Linie, deren Endpunkt sich dem Anfangspunkte der wagerechten Linie nähert (Fig. 57).

Eine rechtssteigende Linie, deren Endpunkt sich dem Endpunkte einer wagerechten Linie nähert (Fig. 58).

Eine links- und eine rechtsfallende Linie, deren Anfangspunkte sich nähern (Fig. 59).

Eine wagerechte und eine linkssteigende Linie, deren Anfangspunkte sich nähern (Fig. 60).

Eine rechts- und eine linkssteigende Linie, deren oberste Punkte sich nähern (Fig. 61).

F. Sich vereinigende Linien.

§. 23. Fig. 62 — 68.

Eine wagerechte Linie, mit deren Anfangspunkt sich der unterste Punkt einer senkrechten vereinigt (Fig. 62).

Eine wagerechte Linie, mit deren Endpunkt sich der unterste Punkt einer senkrechten Linie vereinigt (Fig. 63).

Eine wagerechte und eine rechtssteigende Linie, deren Anfangspunkte sich vereinigen (Fig. 64).

Eine wagerechte und eine rechtsfallende Linie, deren Endpunkte sich vereinigen (Fig. 65).

Eine wagerechte und eine rechtsfallende Linie, deren Anfangspunkte sich vereinigen (Fig. 66).

Eine wagerechte und eine rechtssteigende Linie, deren Endpunkte sich vereinigen (Fig. 67).

Eine wagerechte Linie, mit deren Anfangspunkt sich der Endpunkt einer rechtsfallenden Linie vereinigt (Fig. 68).

Eine wagerechte und eine linksfallende Linie, deren Endpunkte sich vereinigen (Fig. 69).

Eine wagerechte Linie, mit deren Anfangspunkt sich der Endpunkt einer rechtssteigenden vereinigt (Fig. 70).

Eine wagerechte und eine linkssteigende Linie, deren Endpunkte sich vereinigen (Fig. 71).

G. Neigung der Linien.

§. 24.

Wenn eine senkrechte Linie sich mit einer wagerechten Linie vereinigt, so neigen sich die Linien weder zu, noch von einander (F. 62 und 63).

Eine rechtssteigende und eine wagerechte Linie, deren Anfangspunkte sich vereinigen, neigen sich zu einander (Fig. 64).

Eine rechtsfallende Linie, welche sich mit dem Endpunkte der wagerechten Linie vereinigt, neigt sich abwärts zu derselben (Fig. 65).

Eine rechtsfallende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem Anfangspunkte einer wagerechten vereinigt, neigt sich aufwärts zu derselben (F. 66).

Eine linksfallende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem obersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich rechts zu derselben (F. 72).

Eine rechtsfallende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem obersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich links zu derselben (F. 73).

Eine linkssteigende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem untersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich rechts aufwärts zu derselben (Fig. 74).

Eine rechtssteigende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem untersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich links aufwärts zu derselben (Fig. 75).

Eine linkssteigende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem obersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich aufwärts von derselben (Fig. 76).

Eine rechtssteigende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem obersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich auch aufwärts von derselben (Fig. 77).

Eine linksfallende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem untersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich abwärts von derselben (Fig. 78).

Eine rechtsfallende Linie, deren Anfangspunkt sich mit dem untersten Punkte einer senkrechten Linie vereinigt, neigt sich auch abwärts von derselben (Fig. 79).

III. Winkel.

§. 25.

Wenn sich zwei vereinigte Linien weder ab, noch zu neigen, so bilden sie einen geraden oder rechten Winkel (Fig. 62 und 63).

Wenn sich zwei vereinigte Linien zu einander neigen, so entsteht ein spitzer Winkel (Fig. 64, 65, 66 u. a. m.).

Wenn sich zwei vereinigte Linien von einander neigen, so entsteht ein stumpfer Winkel (Fig. 76 – 79).

Diejenigen Linien, welche einen Winkel bilden, oder den Winkel einschließen, heißen Schenkel des Winkels.

Ein rechter Winkel hat einen wagerechten und einen senkrechten Schenkel. Ein spitzer Winkel hat entweder einen wagerechten und einen schrägen, oder einen senkrechten und einen schrägen Schenkel; und eben so der stumpfe Winkel.

IV. Formen oder Figuren.

A. Eckige Figuren.

1. Dreiecke.

§. 26.

Ein rechter Winkel, dessen Schenkel durch eine dritte Linie verbunden werden (Fig. 80).

Ein spitzer Winkel, dessen Schenkel durch eine dritte Linie verbunden werden (Fig. 81).

Ein stumpfer Winkel, dessen Schenkel durch eine dritte Linie verbunden werden (Fig. 82).

Zwei gleiche Schenkel, welche durch eine dritte ungleiche Linie verbunden werden (Fig. 83).

Drei gleiche Schenkel, welche sich mit einander vereinigen (Fig. 84).

§. 27.

Wenn zwei Schenkel, die einen Winkel einschließen, durch eine dritte Linie verbunden werden, so schließen sie einen Raum ein, welcher drei Ecken hat, und ein eingeschlossener Raum von drei Ecken heißt ein Dreieck.

Die Linien, welche den Raum einschließen, heißen die Seiten oder Schenkel des Dreiecks, und der Raum, welcher von den Seiten eingeschlossen wird, heißt die Fläche des Dreiecks oder die Dreiecksfläche.

§. 28.

Wenn sich zwei Seiten eines Dreiecks weder ab, noch zu neigen, so ist es ein Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, und ein Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, heißt ein rechtwinkliches Dreieck (Fig. 80).

Wenn sich die Seiten eines Dreiecks alle zu einander neigen, so ist dieß ein Dreieck, welches

drei spitze Winkel hat, und ein Dreieck, welches drei spitze Winkel hat, heißt ein spitzwinkliches Dreieck (Fig. 81).

Wenn sich zwei Seiten eines Dreiecks von einander neigen, so ist es ein Dreieck, welches einen stumpfen Winkel hat, heißt ein stumpfwinkliches Dreieck (Fig. 82).

Wenn zwei gleiche Schenkel durch eine dritte ungleiche Linie verbunden werden, so entsteht ein Dreieck, welches zwei gleiche Schenkel hat, und ein Dreieck, welches zwei gleiche Schenkel hat, heißt ein gleichschenkliches Dreieck (Fig. 83).

Wenn drei gleiche Linien zu einem Dreieck verbunden werden, so entsteht ein Dreieck, welches drei gleiche Seiten und drei gleiche spitze Winkel hat, und ein Dreieck, welches drei gleiche Seiten hat, heißt ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 84).

§. 29.

Die beiden Schenkel des rechtwinklichen Dreiecks (Fig. 80), welche den rechten Winkel einschließen, heißen die beiden Katheten, und die Verbindungslinie der beiden Katheten heißt die Hypothenuse. Die Hypothenuse neigt sich zu den Katheten, und bildet mit ihnen zwei spitze Winkel. Die Verbindungslinie des stumpfwinklichen Dreiecks neigt sich noch mehr zu den beiden Schenkeln, welche den stumpfen Winkel einschließen, und bildet mit ihnen noch spitzere Winkel.

Die Seiten des spitzwinklichen Dreiecks (F. 81) sind von ungleicher Länge und ungleicher Neigung, und daher sind auch die Winkel von ungleicher Größe. Jeder dieser spitzen Winkel ist aber größer, als einer der spitzen Winkel des rechtwinklichen oder des stumpfwinklichen Dreiecks von gleichen Katheten, und jeder dieser spitzen Winkel ist kleiner, als der rechte Winkel des rechtwinklichen

Dreiecks, oder der stumpfe Winkel des stumpfwinklichen Dreiecks.

§. 30.

Die beiden gleichen Schenkel des gleichschenklichen Dreiecks ruhen auf den Endpunkten ihrer Verbindungslinie. Diejenige Linie, auf welcher die beiden gleichen Schenkel ruhen, heißt die Grundlinie oder die Basis (F. 83).

Wenn die beiden gleichen Schenkel kürzer sind, als die Basis, so neigen sie sich mehr zu derselben, und mehr von einander; wenn sie länger sind, als die Basis, so neigen sie sich mehr zu einander, und mehr von der Basis (Fig. 83 und 85).

Wenn sich die gleichen Schenkel mehr zu der Basis und mehr von einander neigen, so sind die beiden Winkel, welche an der Basis liegen, oder die Basiswinkel, kleiner, als der oberste, oder der Scheitelwinkel (Fig. 83).

Wenn hingegen die gleichen Schenkel sich weniger zur Basis und mehr zu sich selbst neigen, so sind die Basiswinkel größer, als der Scheitelwinkel (Fig. 85).

Je länger die beiden Schenkel, und je kürzer die Basis, desto mehr Neigung zu sich selbst, und desto weniger zur Basis, und desto kleiner folglich der Scheitelwinkel und desto größer die Basiswinkel; je kürzer die beiden Schenkel, und je länger die Basis, desto mehr Neigung zur Basis, und desto weniger zu sich selbst; und desto kleiner folglich die Basiswinkel, und desto größer der Scheitelwinkel.

Die gleichen Schenkel neigen sich immer zur Basis, aber nicht immer zu sich selbst; daher sind die Basiswinkel immer spitze Winkel, aber nicht immer der Scheitelwinkel.

Wenn

Wenn die gleichen Schenkel viel kürzer sind, als die Basis, so neigen sie sich von einander, und dann ist der Scheitelwinkel **stumpf** (Fig. 86). Wenn aber die gleichen Schenkel so lang sind, daß sie sich zur Basis verhalten, wie die Katheten zur Hypothenuse, so ist der Scheitelwinkel ein **rechter** Winkel (Fig. 87).

Wenn die beiden gleichen Schenkel der Basis gleich sind, so ist der Scheitelwinkel ein spitzer Winkel und den Basiswinkeln gleich. Dann sind alle drei Seiten einander gleich, und das Dreieck ist ein **gleichseitiges** (Fig. 84).

2. Vierecke.

§. 31.

Zwei gleiche wagerechte und zwei ihnen und sich selbst gleiche senkrechte Parallellinien, deren Endpunkte sich vereinen, bilden ein Viereck, welches vier rechte Winkel und vier gleiche Seiten hat; und ein Viereck, welches vier rechte Winkel und vier gleiche Seiten hat, heißt ein **gleichseitiges Viereck** oder ein **Quadrat** (Fig. 88).

Zwei gleiche wagerechte, und zwei sich selbst gleiche, den vorigen aber ungleiche, senkrechte Parallellinien, die sich in ihren Endpunkten vereinen, bilden ein Viereck, welches je zwei und zwei Parallelseiten hat; und ein Viereck, welches je zwei und zwei gleiche Parallelseiten und vier rechte Winkel hat, heißt ein **Rechteck** oder **Rectangulum** (Fig. 89).

Zwei gleiche wagerechte (oder senkrechte), und zwei ihnen und sich selbst gleiche **schräge** Parallellinien, deren Endpunkte sich vereinen, bilden ein Viereck, welches vier gleiche Seiten, aber nur zwei und zwei entgegengesetzte gleiche Winkel hat; und ein Viereck, wo alle vier Seiten, aber nur zwei

und zwei entgegengesetzte Winkel gleich sind, heißt ein Rhombus oder eine Raute (Fig. 90).

Zwei gleiche wagerechte (oder senkrechte), und zwei sich selbst gleiche, den vorigen aber ungleiche, schräge Parallellinien, deren Endpunkte sich vereinen, bilden ein Viereck, welches nur zwei und zwei gegenüberliegende gleiche Parallelseiten und zwei und zwei entgegengesetzte gleiche Winkel hat; und ein Viereck, wo nur die gegenüberliegenden Seiten und die entgegengesetzten Winkel einander gleich sind, heißt eine Rhomboide (Fig. 91).

Jedes Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel laufen, also jedes Viereck, das von zwei Paar Parallellinien gebildet wird, heißt ein Parallelogramm. Quadrate, Rechtecke, Rauten und Rhomboiden sind Parallelogramme.

§. 32.

Das Quadrat hat vier Winkel, zwei unterste, zwei oberste, zwei zur Rechten, zwei zur Linken, einen obersten zur Rechten, einen obersten zur Linken, einen untersten zur Rechten, einen untersten zur Linken.

Der oberste Winkel zur Rechten liegt neben dem obersten Winkel zur Linken, über dem untersten zur Rechten und ist dem untersten zur Linken entgegengesetzt.

Der unterste Winkel zur Rechten liegt neben dem untersten Winkel zur Linken, unter dem obersten Winkel zur Rechten, und ist dem obersten Winkel zur Linken entgegengesetzt.

(Auf diese Weise werden auch noch die zwei andern Winkel, und alle vier Winkel auch auf folgende Art durchgegangen.)

Aus der Vereinigung des obersten Punktes der senkrechten Seite zur Rechten mit dem Endpunkte

der obersten wagerechten Seite entsteht der oberste Winkel zur Rechten.

Aus der Vereinigung des Anfangspunktes der untersten wagerechten Seite mit dem untersten Punkte der senkrechten Seite zur Linken entsteht der unterste Winkel zur Linken u. s. w.

Zwei senkrechte, oder zwei wagerechte, oder zwei schräge Parallelseiten liegen einander gegenüber. Eben so liegen zwei nebeneinander- oder übereinanderliegende Winkel einander gegenüber. Aber zwei in schräger Richtung übereinanderliegende Winkel sind einander entgegengesetzt.

Die unterste wagerechte Seite ist die Grundlinie oder Basis, die Ausdehnung des Quadrats nach der Richtung der Grundlinie ist die Breite, und die Ausdehnung von der Grundlinie bis zur obersten Parallelseite ist die Höhe des Quadrats. Derjenige Raum, welcher von den Seiten des Quadrats eingeschlossen wird, heißt die Fläche des Quadrats oder die Quadratfläche.

Diejenige Linie, welche durch die Quadratfläche aus einer Ecke in die entgegengesetzte gezogen wird, heißt eine Diagonallinie (Fig. 92 ad oder bc). Die Linie, welche gegenüberliegende Punkte der Quadratseiten verbindet, heißt eine Theilungslinie (Fig. 92 ef).

Die Diagonallinie theilt die Quadratfläche in zwei gleiche rechtwinkliche Dreiecke, von welchen die Diagonallinie die gemeinschaftliche Hypothenuse und zwei und zwei Quadratseiten die Katheten sind (Fig. 92).

Die zweite Diagonallinie durchschneidet die erste in ihrem Mittelpunkte, und theilt mit der ersten die Quadratfläche in vier gleiche rechtwinkliche Dreiecke, von welchen je zwei und zwei halbe Diagonallinien die gemeinschaftlichen Katheten sind, und eine Hypothenuse ist (Fig. 92).

§. 33.

Vier Linien von verschiedener Länge und Richtung vereinigen sich, und bilden eine Figur von verschiedener Lage und Länge der Seiten und von verschiedenen Winkeln. Ein Viereck von ungleichlangen Linien und ungleichen Winkeln heißt ein Trapezium (Fig. 93).

Wenn in einem Viereck zwei Linien parallel laufen, aber alle ungleiche Länge haben, so heißt dieses Viereck eine Trapezoide (Fig. 94).

3. Polygon.

§. 34.

Wenn sich fünf oder mehrere gerade Linien vereinen, so daß sie einen Raum einschließen, so entsteht eine Figur, welche eben so viel Ecken hat, als sich Linien vereinen. Eine jede Figur, welche mehr als vier Ecken hat, heißt ein Vieleck oder Polygon.

Wenn sich die Seiten eines Polygons gleich verhalten, so schließen sie auch gleiche Winkel ein. Polygone, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, sind regelmäßige Polygone (Fig. 95 und 96).

Wenn sich die Seiten aber ungleich verhalten, so neigen sie sich auch ungleich, und bilden auch ungleiche Winkel. Polygone von ungleichen Seiten und Winkeln sind unregelmäßige Polygone (Fig. 97 und 98).

Ein Polygon, welches fünf Seiten hat, heißt ein Fünfeck oder Pentagon; ein Polygon von sechs Seiten heißt ein Sechseck oder Hexagon, von sieben Seiten ein Siebeneck oder Heptagon, von acht Seiten ein Achteck oder Octagon, von neun Seiten ein Neuneck oder Henneagon, von zehn Seiten ein Zehneck oder De-

kagon, von eilf Seiten ein Eilfeck oder Undekagon, von zwölf Seiten ein Zwölfeck oder Duodekagon u. s. w.

§. 35. (Fig. 96).

Derjenige Punkt eines regelmäßigen Polygons, welcher von allen Seiten und Winkeln in gleicher Entfernung liegt, heißt der Mittelpunkt oder der Centripunkt. Wenn man aus den Winkeln des Polygons gerade Linien in den Mittelpunkt zieht, so erhält man eben so viel Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Die Scheitelwinkel dieser Polygondreiecke liegen alle am Centrum, und heißen deswegen Centriwinkel. Diejenigen Linien, welche die entgegengesetzten Winkel der Polygone verbinden, heißen Diagonallinien derselben.

B. Runde Figuren.

§. 36.

Eine regelmäßig krumme Linie, welche gleichförmig in sich selbst zurückläuft, umschließt einen Raum, welcher gleichförmig gerundet ist (F. 99).

Eine regelmäßig krumme Linie, welche ungleichförmig in sich selbst zurückläuft, umschließt einen Raum, welcher zwar regelmäßig, aber ungleichförmig gerundet ist (Fig. 100).

Ein gleichförmig gerundeter Raum heißt ein Cirkel (Fig. 99); ein regelmäßig, aber ungleichförmig gerundeter Raum heißt eine Ellipse (Fig. 100). Ist die regelmäßig gerundete Figur an dem einen Ende etwas zugespitzt, so heißt sie eiförmig oder oval (Fig. 101).

§. 37. (Fig. 99).

Diejenige Linie, welche den Cirkel einschließt oder begrenzt, heißt die Cirkellinie oder Peripherie. Diejenige Fläche, welche von der Peri-

pherie umschlossen wird, heißt die Cirkelfläche. Derjenige Punkt der Cirkelfläche, welcher von allen Punkten der Peripherie in gleicher Entfernung liegt, heißt der Mittelpunkt des Cirkels oder das Centrum (Fig. 99 c).

Eine gerade Linie von irgend einem Punkte der Peripherie durch das Centrum bis zum entgegengesetzten Peripheriepunkte gezogen durchmißt die ganze Cirkelfläche, und heißt der Durchmesser oder der Diameter (Fig. 102 ab).

Diejenige gerade Linie, welche von irgend einem Peripheriepunkte bis ins Centrum gezogen wird, durchmißt die halbe Cirkelfläche, und heißt ein Halbmesser oder Radius (Fig. 102 cd).

Eine gerade Linie, welche zwei gegenüberliegende Punkte der Peripherie verbindet, ohne das Centrum zu berühren, heißt eine Sehne oder Chorde (Fig. 102 ef).

Eine gerade Linie, welche vom Centrum ausgehend die Peripherie durchschneidet, heißt eine Durchschneidungslinie oder Secante (Fig. 102 cg).

Eine gerade Linie, welche die Peripherie von außen berührt, heißt eine Berührungslinie oder Tangente (Fig. 102 hi).

Eine Sehne schneidet einen Theil der Cirkelfläche ab; der Theil der Cirkelfläche, welcher durch eine Sehne abgeschnitten wird, heißt ein Abschnitt oder Segment (Fig. 102 ehf); und derjenige Theil der Cirkelfläche, welcher von zwei Radien und dem zwischen ihnen liegenden Bogen eingeschlossen wird, heißt ein Ausschnitt oder Sector (cdk).

§. 38.

Wenn zwei Radien (ac und fc) einen spitzen Winkel einschließen, und von dem Endpunkte des einen Radius auf den andern Radius ein Perpen-

dikel gefällt wird, so ist dieser Perpendikel (fb) der Sinus desjenigen Cirkelbogens, welchen die Radien einschließen.

Der Sinus schneidet von dem Radius, auf welchem er senkrecht steht, einen Theil ab; dieser zwischen der Peripherie und dem Sinus liegende Theil des Radius liegt dem Sinus der Quere, und heißt deswegen der Quersinus oder Sinus versus (ab).

Derjenige Radius, welcher mit dem Radius, auf welchem der Sinus senkrecht steht, einen rechten Winkel bildet, und folglich mit dem Sinus parallel läuft, heißt der ganze Sinus oder der Sinus totus (ec).

Wenn man von dem Peripheriepunkte, wo der Sinus sich mit dem Radius vereinigt, einen Perpendikel auf den Sinus totus fällt, so läuft dieser mit dem Quersinus parallel, ist der Sinus des Nebenwinkels, und heißt der Nebensinus oder Cosinus (fd). Da er auch den Sector durchmißt, welcher zur Ergänzung des rechten Winkels gehört, so heißt er auch der ergänzende Sinus oder Sinus complemens. Der von dem Cosinus und der Peripherie eingeschlossene Theil des Sinus totus ist der Cosinus versus (ed).

Wenn man auf den Endpunkt des Radius, auf welchem der Sinus senkrecht steht, eine Tangente zieht, und den Radius, von dessen Endpunkte der Sinus ausgeht, bis dahin verlängert, wo er die Tangente erreicht, so ist dieser verlängerte Radius (cg) die Secante, und jene Berührungslinie (ga) die Tangente des Bogens, den die beiden Radien einschließen.

Diejenige Tangente (he), welche von dem Endpunkte des Sinus totus bis zur Tangente gezogen wird, läuft mit dem Cosinus parallel, und

heißt die Cotangente, und der zwischen dem Centrum und der Cotangente liegende Theil der Secante (c h) ist die Cosecante.

§. 39. (Fig. 104.)

Der Diameter theilt den Cirkel in zwei gleiche Theile; jeder dieser Theile ist ein Halbzirkel (a d b und a c b). Zwei Diameter, die sich rechtwinklich durchschneiden, theilen den Cirkel in vier gleiche Theile (a c, c b, b d und a d); jeder dieser Theile ist ein Viertelscirkel oder ein Quadrante. Die Radien, welche einen Quadranten einschließen, bilden einen rechten Winkel.

Vier Diameter, von denen sich je zwei und zwei rechtwinklich durchschneiden, theilen den Cirkel in acht gleiche Theile (a e, e c, c k u. s. w.); jeder dieser acht gleichen Theile ist ein Achtelzirkel oder ein Octante. Die Radien, welche einen Octanten einschließen, bilden einen spitzen Winkel, der $\frac{1}{2}$ eines rechten ist.

Die ganze Peripherie wird in 360 Theile getheilt; jedes 360stel nennt man einen Grad. Der Halbcirkel hat also $\frac{1}{2} \times 360$, das ist 180 Grad.

Der Halbcirkel berührt mit seinen Endpunkten eine gerade Linie; also jeder Cirkelbogen, der mit seinen Endpunkten auf einer geraden Linie ruht, ist ein Halbcirkel, und hat 180°.

Ein Quadrant ist ein Halb von einem Halbcirkel, und hat also $\frac{1}{2} \times 180$, das ist 90°.

Ein Quadrant liegt zwischen den Radien, welche einen rechten Winkel bilden; und umgekehrt, liegt zwischen den Schenkeln, welche einen rechten Winkel bilden, ein Quadrant oder ein Bogen von 90°. Daher sagt man, ein rechter Winkel hat 90°.

Ein Octante ist $\frac{1}{2}$ von einem Quadranten, und hat also $\frac{1}{2} \times 90$, das ist 45°. Ein spitzer Winkel, welcher ein Halb des rechten Winkels ist, schneidet einen Octanten ab, und hat also 45°.

Alle Radien schließen einen Winkel ein; ist er größer, als ein rechter Winkel, oder ist er stumpf, so hat er mehr als 90°; ist er kleiner, als ein rechter, oder ist er spitz, so hat er weniger als 90°; also ein rechter Winkel hat 90°, ein stumpfer hat mehr als 90°, und ein spitzer hat weniger als 90°.

So wie sich ein Theil der Peripherie zum Quadranten verhält, so verhält sich der spitze Winkel, der den Quadranten einschließt, zum rechten Winkel. Wenn z. B. die Schenkel eines Winkels $\frac{1}{3}$ eines Quadranten abschneiden, so ist dieser Winkel auch $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels, und hat $\frac{1}{3} \times 90$, das ist 30°. Ein anderer Winkel, der $\frac{3}{10}$ eines Quadranten abschneidet, muß auch $\frac{3}{10}$ eines rechten Winkels oder $\frac{3}{10} \times 90$, das ist 27°, haben.

(Hier können noch einige Beispiele zur Uebung genommen werden.)

§. 40. Fig. 105.

Diejenige Sehne, welche einen Quadranten abschneidet, heißt die Sehne von 90° (ab). Diejenige Tangente, welche mit dem Quadranten gleiche Höhe hat, wird von einer Secante eingeschlossen, welche durch den Mittelpunkt des Quadranten geht, und mit dem entgegenliegenden Radius einen Winkel von 45° bildet; daher heißt diese Tangente die Tangente von 45° (cd).

Die Tangente, welche die ganze Höhe des Cirkels erreicht, wird von zwei Secanten eingeschlossen, welche einen rechten Winkel bilden; daher heißt sie die Tangente von 90° (ef).

§. 41.

Wenn man aus einem gemeinschaftlichen Mittelpunkte mehrere Kreise von ungleicher Größe zieht, so liegen diese in einander, und haben alle einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Kreise, welche

ein gemeinschaftliches Centrum haben, heißen concentrische Kreise (Fig. 106).

Wenn zwei Kreise in einem solchen Verhältnisse zu einander liegen, daß sie verschiedene Mittelpunkte haben, so heißen sie excentrische Kreise (Fig. 107, 108 u. s. w.)

Die Linie, welche die Centra beider Kreise verbindet, heißt die Centrallinie (Fig. 107 ab).

Die excentrischen Kreise können sich

a) innen berühren; — dann liegen die Centra und die Centrallinie innerhalb beider Kreise — (Fig. 107);

b) in einander liegen, ohne sich zu berühren; — auch dann liegen die Centra und die Centrallinie innerhalb beider Kreise — (Fig. 108);

c) sich durchschneiden; — dann durchschneidet die Centrallinie die Peripherie beider Kreise — (Fig. 109 A); oder — wenn die Peripherie des einen Kreises durch das Centrum des andern geht — nur die Peripherie des einen Kreises (Fig. 109 B).

d) sich so durchschneiden, daß die Peripherie eines jeden Kreises durch das Centrum des andern geht — dann verbindet die Centrallinie die beiden Peripherien, ohne sie zu durchschneiden — (Fig. 110);

e) sich von außen berühren; — dann durchschneidet die Centrallinie den Berührungspunkt beider Kreise — (Fig. 111);

f) endlich von einander getrennt liegen, ohne sich zu berühren; — dann durchschneidet die Centrallinie beide Kreise da, wo sie sich am nächsten liegen (Fig. 112).

§. 42. Fig. 113.

Die Ellipse hat Länge und Breite. Die Linie, welche die äußersten Punkte der Länge verbindet, heißt die große Axe (ab), und die Linie, welche

die äußersten Punkte der Breite verbindet, heißt die kleine Axe (cd). Beide Axen zusammengenommen heißen die conjugirten Axen. Der Punkt, in welchem sich die conjugirten Axen durchschneiden, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum der Ellipse (c).

Die beiden Hälften der großen Axe heißen Radien der Ellipse (ac und cb). Diejenigen Linien innerhalb der Ellipse, welche auf der kleinen Axe senkrecht stehen, und bis zur Peripherie gehen, heißen Ordinaten der großen Axe (ef); und die Linien innerhalb der Ellipse, welche mit der kleinen Axe parallel laufen, und auf der großen Axe senkrecht stehen, heißen Ordinaten der kleinen Axe (gh). — Wenn man einen elliptisch gestalteten Brennspiegel an die Sonne hält, so fallen gegen beide Enden in eine bestimmte Entfernung zwei Brennpunkte. Diese findet man, wenn man eine halbe große Axe nimmt, und mit derselben von dem Endpunkte der kleinen Axe aus die erstere durchschneidet. — Es hat also die Ellipse zwei Brennpunkte, die von dem Endpunkte der kleinen Axe aus in der Entfernung der halben großen Axe liegen (ii).

Diejenige Linie, welche die dritte oder kleinste Proportionallinie zur großen und zur kleinen Axe ist, heißt der Parameter.

§. 43. Fig. 114.

Diejenige regelmäßig krumme Linie, welche sich von ihrer größten Oeffnung ellipsenartig zusammenzieht, heißt eine Parabel. Der oberste Punkt ist der Scheitelpunkt (a).

Wenn man in einem parabolischen Brennspiegel die Sonnenstrahlen auffängt, so fällt der Brennpunkt in eine bestimmte Entfernung von dem Scheitelpunkte. Diesen Punkt findet man gerade in dem Mittelpunkt derjenigen Ordinate, welche

dem Parameter gleich ist; oder, welches einerlei ist: der Brennpunkt einer Parabel ist der Punkt, dessen Abscisse dem vierten Theil des Parameters gleich ist.

Diejenige gerade Linie, welche von dem Brennpunkt aus nach irgend einem Punkt der parabolischen Linie gezogen werden kann, heißt der Radius Vector.

Wenn man an die Seite einer parabolischen Linie eine gerade Linie legt, so ist dieses eine Tangente (hi); verlängert man die Axe der Parabel durch den Scheitelpunkt so lange, bis sie sich mit der Tangente vereinigt, so heißt diejenige Linie, welche zwischen der aus dem Berührungspunkt der Tangente gezogenen Ordinate (ef) und dem obersten Berührungspunkt der Tangente liegt, die Subtangente.

Fälle ich einen Perpendikel aus dem Berührungspunkt derselben Tangente auf die Axe, so heißt dieser Perpendikel die Normallinie. Derjenige Theil der Axe, welcher zwischen der Normallinie und der vorhin genannten Ordinate liegt, heißt die Subnormallinie.

Eine gerade Linie, welche von einem Punkt der parabolischen Linie mit der Axe parallel, und also rechtwinklich, durch die Ordinate gezogen werden kann, heißt der Diameter einer Parabel (bc).

§. 44. Fig. 115.

Diejenige regelmäßig krumme Linie, welche von der untersten größten Oeffnung nach oben zu in der Gestalt eines gleichschenklichen Dreiecks zusammenläuft, heißt eine Hyperbel. Diejenigen geraden Linien, welche gegenüberliegende Punkte der Hyperbel verbinden, und mit der untersten Verbindungslinie parallel laufen, heißen die Ordinaten (de und hi), und wenn diese Linien durch

eine vom Scheitel auf den Mittelpunkt der Verbindungslinie fallende Linie in zwei gleiche Theile getheilt werden, so heißen diese Hälften (df und fe) halbe Ordinaten. Eine Linie, die vom Scheitel auf eine Ordinate senkrecht fällt, oder sie in zwei Theile theilt, heißt die Abscisse dieser Ordinate. So ist cf die Abscisse der Ordinate de, und cg die Abscisse der zweiten Ordinate hi.

V. Körper.

A. Eckige Körper.

§. 45.

Wenn sich mehrere Flächen vereinen, und einen Raum der Länge, Breite und Höhe nach zugleich begrenzen, so erhält der dreifach begrenzte Raum auch eine dreifache Ausdehnung, eine dreifache Dimension, nach Länge, Breite und Höhe. Wenn man durch die Länge mit der Breite parallel mißt, so muß man den Umfang des Körpers durchmessen, und dieser so durchmessene Umfang heißt die Dicke.

§. 46.

Zwei Quadratflächen, die gerade über einander gelegt werden, und zwar in eine Entfernung, die so viel beträgt, als die gerade Länge der Fläche, lassen einen unbegrenzten Raum zwischen sich. Will ich diesen Raum auch begrenzen, so muß ich an jede Seite der in einer der Quadratfläche gleichen Distanz übereinanderliegenden Flächen wiederum eine gleiche Quadratfläche legen. Da jedes Quadrat vier Seiten hat, so wird der vorher noch unbegrenzte Raum nun begrenzt, und der ganze Raum ist von sechs Flächen eingeschlossen. Unten von einer Grundfläche, von einer Oberfläche und von vier Seitenflächen, nämlich von einer vordersten,

hintersten, linken und rechten. Die Seitenflächen sind in Beziehung auf die untere und obere senkrecht, so wie die untere und obere in Beziehung auf die Seitenflächen wagerecht liegend. Jede dieser sechs Flächen hat vier Ecken und vier Seiten. Bei der Vereinigung stoßen aber je drei und drei Ecken und zwei und zwei Seiten zusammen; daher hat der ganze Cubus nur acht Ecken und zwölf Seiten, und der gerade Durchmesser oder Dicke beträgt so viel als eine Seitenfläche.

Anmerkung.

Die Körper werden hier nicht als gegeben, sondern als entstehend gesetzt. Die Geometrie ist keine Wissenschaft, die man durch das empirische Auffassen der Gegenstände sich zueignet. Ihre Wahrheit ruht auf rein geistigen Thätigkeiten. Aus den Eigenschaften, die theilweise aufgefaßt werden, schafft sich der Geometer seinen Körper oder seine Fläche, und daraus folgert er seine Wahrheiten. Was ihm das Auge darbietet, ist nur Versinnlichung des mit dem Verstande Aufgefaßten, und also muß es auch behandelt werden. Der Schüler gewöhne sich demnach, die Körper vor sich entstehen zu lassen, nicht blos sie ins Auge zu fassen; sie zu denken, nicht blos zu sehen. Dadurch wird der Irrthum vermieden, den das Hinzudenken anderer Qualitäten herbeiführen kann, und die Größe separirt von jeder physikalischen Eigenschaft. Eine Operation, die nie den Augen, sondern ewig dem Verstande gehören wird.

Aber in vielfacher anderer Rücksicht wird es sehr nützlich seyn, den Zögling zu gewöhnen, einen physisch-geometrischen Körper systematisch ins Auge zu fassen. Deswegen vornehmlich, weil es zum deutlichsten Auffassen des Zusammenhangs in der einen, und zum sichern Orientiren im Raume in der andern Hinsicht gewöhnt. Davon gebe der bestimmteste und einfachste Körper, der Cubus, ein Beispiel.

Beschreibung des Würfels.

Der Cubus besteht aus sechs Flächen, acht Ecken, zwölf Seiten und 24 Winkeln. Die Flächen sind zwei wagerechte und vier senkrechte; zwei über einander, zwei vor einander, und zwei neben einander; eine Grund-

fläche, eine Oberfläche, eine Vorderfläche, eine Hinterfläche, eine rechte Seitenfläche, eine linke Seitenfläche. Acht Ecken: vier obere, vier untere, vier vordere, vier hintere, vier zur Rechten, vier zur Linken, zwei oberste vorderste, zwei oberste hinterste, zwei unterste vorderste, zwei unterste hinterste; zwei oberste zur Rechten, zwei oberste zur Linken, zwei unterste zur Rechten, zwei unterste zur Linken; eine oberste vorderste Ecke zur Rechten, ein solche zur Linken; eine oberste hinterste Ecke zur Rechten, eine solche zur Linken; eine unterste vorderste Ecke zur Rechten, eine solche zur Linken; eine unterste hinterste Ecke zur Rechten, eine solche zur Linken.

Jede Ecke der wagerechten Parallelflächen hat eine neben, eine vor oder hinter sich, und der dritten ist sie in wagerecht-schräger Richtung entgegengesetzt. Jede Ecke der senkrechten Parallelflächen hat eine neben, eine unter oder über sich, und der dritten ist sie in wagerecht-schräger Richtung entgegen gesetzt.

I. Die oberste vorderste Ecke zur Rechten liegt neben der obersten vordersten Ecke zur Linken, vor der obersten hintersten Ecke zur Rechten, über der untersten vordersten Ecke zur Rechten; der untersten vordersten Ecke zur Linken ist sie in rechts-, der untersten hintersten Ecke zur Rechten in herwärts steigender, der obersten hintersten Ecke zur Linken in wagerecht rechts herwärts laufender, der untersten hintersten Ecke zur Linken in rechts herwärts steigender Richtung entgegen gesetzt.

II. Die oberste vorderste Ecke zur Linken liegt neben der obersten vordersten Ecke zur Rechten, vor der obersten hintersten Ecke zur Linken, über der untersten vordersten Ecke zur Linken; der untersten vordersten Ecke zur Rechten ist sie in links-, der untersten hintersten Ecke zur Linken in herwärts steigender, der obersten hintersten Ecke zur Rechten in wagerecht links herwärts laufender, der untersten hintersten Ecke zur Rechten in links herwärts steigender Richtung entgegen gesetzt.

III. Die oberste hinterste Ecke zur Rechten liegt neben der obersten hintersten Ecke zur Linken, hinter der obersten vordersten Ecke zur Rechten, über der untersten hintersten Ecke zur Rechten; der untersten hintersten Ecke zur Linken ist sie in rechts-, der untersten vordersten Ecke zur rechten in hinwärts steigender, der obersten vordersten Ecke zur Linken in wagerecht rechts hinwärts laufender, der untersten vorder-

sten Ecke zur Linken in rechts hinwärts steigender Richtung entgegen gesetzt.

IV. Die oberste hinterste Ecke zur Linken liegt neben der obersten hintersten Ecke zur Rechten, hinter der obersten vordersten Ecke zur Linken, über der untersten hintersten Ecke zur Linken; der untersten hintersten Ecke zur Rechten ist sie in links-, der untersten vordersten Ecke zur Linken in hinwärts steigender, der obersten vordersten Ecke zur Rechten in wagerecht links hinwärts laufender, der untersten vordersten Ecke zur Rechten in links hinwärts steigender Richtung entgegen gesetzt.

V. Die unterste vorderste Ecke zur Rechten liegt neben der untersten vordersten Ecke zur Linken, vor der untersten hintersten Ecke zur Rechten, unter der obersten vordersten Ecke zur Rechten; der obersten vordersten Ecke zur Linken ist sie in rechts-, der obersten hintersten Ecke zur Rechten in herwärts fallender, der untersten hintersten Ecke zur Linken in wagerecht rechts herwärts laufender, der obersten hintersten Ecke zur Linken in rechts herwärts fallender Richtung entgegen gesetzt.

VI. Die unterste vorderste Ecke zur Linken liegt neben der untersten vordersten Ecke zur Rechten, vor der untersten hintersten Ecke zur Linken, unter der obersten vordersten Ecke zur Linken; der obersten vordersten Ecke zur Rechten ist sie in links-, der obersten hintersten Ecke zur Linken in herwärts fallender, der untersten hintersten Ecke zur Rechten in wagerecht links herwärts laufender, der obersten hintersten Ecke zur Rechten in links herwärts fallender Richtung entgegen gesetzt.

VII. Die unterste hinterste Ecke zur Rechten liegt neben der untersten hintersten Ecke zur Linken, hinter der untersten vordersten Ecke zur Rechten, unter der obersten hintersten Ecke zur Rechten; der obersten hintersten Ecke zur Linken ist sie in rechts-, der obersten vordersten Ecke zur Rechten in hinwärts fallender, der untersten vordersten Ecke zur Linken in wagerecht rechts hinwärts laufender, der obersten vordersten Ecke zur Linken in rechts hinwärts fallender Richtung entgegen gesetzt.

VIII. Die unterste hinterste Ecke zur Linken liegt neben der untersten hintersten Ecke zur Rechten, hinter der untersten vordersten Ecke zur Linken, unter der obersten hintersten Ecke zur Linken; der obersten hintersten Ecke zur Rechten ist sie in links-, der obersten vor-

vordersten Ecke zur Linken in hinwärts fallender, der untersten vordersten Ecke zur Rechten in wagerecht links hinwärts laufender, der obersten vordersten Ecke zur Rechten in links hinwärts fallender Richtung entgegen gesetzt.

Ein Würfel hat zwölf Seiten, acht wagerechte, vier senkrechte, vier oberste, vier unterste, vier vorderste, vier hinterste, vier zur Rechten, vier zur Linken; vier wagerecht vorbeilaufende, vier wagerecht herzulaufende und vier senkrechte Parallelseiten.

Zwei oberste, zwei unterste, zwei vorderste, zwei hinterste wagerecht vorbeilaufende; zwei oberste, zwei unterste, zwei zur Rechten, zwei zur Linken wagerecht herzulaufende, zwei vorderste, zwei hinterste, zwei zur Rechten, zwei zur Linken senkrechte Parallelseiten.

Eine oberste vorderste, eine oberste hinterste, eine unterste vorderste, eine unterste hinterste wagerecht vorbeilaufende, eine oberste zur Rechten, eine oberste zur Linken, eine unterste zur Rechten, eine unterste zur Linken wagerecht herzulaufende; eine vorderste zur Rechten, eine vorderste zur Linken, eine hinterste zur Rechten, eine hinterste zur Linken senkrechte Parallelseite.

I. Die oberste Parallelfläche wird von der vordersten und hintersten wagerecht vorüberlaufenden von der zur Rechten, von der zur Linken obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite begrenzt.

II. Die unterste Parallelfläche wird von der vordersten und hintersten wagerecht vorbeilaufenden, von der zur Rechten, von der zur Linken untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite begrenzt.

III. Die vorderste Parallelfläche wird von der obersten und untersten wagerecht vorbeilaufenden, von der zur Rechten, von der zur Linken vordersten senkrechten Parallelseite begrenzt.

IV. Die hinterste Parallelfläche wird von der obersten und untersten wagerecht vorüberlaufenden, von der zur Rechten, von der zur Linken hintersten senkrechten Parallelseite begrenzt.

V. Die Parallelfläche zur Rechten wird von der obersten und untersten wagerecht herzulaufenden, von der vordersten, von der hintersten zur Rechten senkrechte Parallelseite begrenzt.

VI. Die linke Parallelfläche wird von der obersten und untersten wagerecht herzulaufenden, von der vordersten, von der hintersten zur Linken senkrechte Parallelseite begrenzt.

I. Die oberste vorderste wagerecht vorüberlaufende Parallelseite liegt vor der obersten hintersten, über der untersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden Parallelseite, zwischen der obersten vordersten Ecke zur Rechten und Linken; der untersten hintersten wagerecht vorbeilaufenden Parallelseite ist sie entgegen gesetzt.

II Die oberste hinterste wagerecht vorüberlaufende Parallelseite liegt hinter der obersten vordersten, über der untersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden, zwischen der obersten hintersten Ecke zur Rechten und Linken; der untersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden Parallelseite ist sie entgegen gesetzt.

III. Die unterste vorderste wagerecht vorüberlaufende Parallelseite liegt vor der untersten hintersten, unter der obersten vordersten wagerecht vorbeilaufenden, zwischen der untersten vordersten Ecke zur Rechten und Linken; der obersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden Parallelseite ist sie entgegen gesetzt.

IV. Die unterste hinterste wagerecht vorüberlaufende Parallelseite liegt hinter der untersten vordersten, unter der obersten hintersten wagerecht vorbeilaufenden, zwischen der untersten hintersten Ecke zur Rechten und Linken; der obersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden Parallelseite ist sie entgegen gesetzt.

V. Die oberste wagerechte herzulaufende Parallelseite zur Rechten liegt neben der obersten zur Linken, über der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten, zwischen der vordersten und hintersten Ecke zur Rechten, der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Linken ist sie entgegen gesetzt.

VI. Die oberste wagerecht herzulaufende Seite zur Linken liegt neben der obersten zur Rechten, über der untersten wagerecht herzulaufenden zur Linken, zwischen der obersten vordersten und hintersten Ecke zur Linken; und der untersten wagerecht herzulaufende Parallelseite zur Rechten ist sie entgegen gesetzt.

VII. Die unterste wagerecht herzulaufende Seite zur Rechten liegt neben der untersten zur Linken, unter der obersten wagerecht herzulaufenden Seite zur Rechten, zwischen der untersten vordersten und hintersten Ecke zur Rechten, und der obersten wagerecht herzulaufenden zur Linken ist sie entgegen gesetzt.

VIII. Die vorderste senkrechte Parallelseite zur Rechten liegt neben der vordersten zur Linken, vor der hintersten senkrechten zur Rechten, zwischen der obersten und untersten vordersten Ecke zur Rechten, und der hintersten senkrechten zur Linken ist sie entgegengesetzt.

IX. Die unterste wagerecht herzulaufende Parallelseite zur Linken liegt neben der untersten zur Rechten, unter der obersten wagerecht herzulaufenden Seite zur Linken, zwischen der untersten und hintersten Ecke zur Linken, und der obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten ist sie entgegen gesetzt.

X. Die vorderste senkrechte Parallelseite zur Linken liegt neben der vordersten zur Rechten, vor der hintersten senkrechten Parallelseite zur Linken, zwischen der obersten und untersten vordersten Ecke zur Linken, und der hintersten senkrechten zur Rechten ist sie entgegen gesetzt.

XI. Die hinterste senkrechte Parallelseite zur Rechten liegt neben der zur Linken, hinter der vordersten senkrechten zur Rechten, zwischen der obersten und untersten hintersten Ecke zur Rechten, und der vordersten senkrechten zur Linken ist sie entgegen gesetzt.

XII Die hinterste senkrechte Parallelseite zur Linken liegt neben der zur Rechten, hinter der vordersten senkrechten Parallelseite zur Linken, zwischen der obersten und untersten hintersten Ecke zur Linken, und der vordersten senkrechten Parallelseite zur Rechten ist sie entgegen gesetzt.

I. Die oberste vorderste Ecke zur Rechten ist die rechtsliegende Grenze der obersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden, die vorderste Grenze der obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten, und die oberste Grenze der vordersten senkrechten Parallelseite zur Rechten.

II. Die oberste vorderste Ecke zur Linken ist die linksliegende Grenze der obersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden, die vorderste Grenze der obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Linken, und die oberste Grenze der vordersten senkrechten Parallelseite zur Linken.

III. Die oberste hinterste Ecke zur Rechten ist die rechtsliegende Grenze der obersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden, die hinterste Grenze der obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten, und die oberste Grenze der hintersten senkrechten Parallelseite zur Rechten.

IV. Die oberste hinterste Ecke zur Linken ist die linksliegende Grenze der obersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden, die hinterste Grenze der obersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Linken, und die

oberste Grenze der hintersten senkrechten Parallelseite zur Linken.

V. Die unterste vorderste Ecke zur Rechten ist die rechtsliegende Grenze der untersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden, die vorderste Grenze der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten, und die unterste Grenze der vordersten senkrechten Parallelseite zur Rechten.

VI. Die unterste vorderste Ecke zur Linken ist die linksliegende Grenze der untersten vordersten wagerecht vorüberlaufenden, die vorderste Grenze der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Linken, und die unterste Grenze der vordersten senkrechten Parallelseite zur Linken.

VII. Die unterste hinterste Ecke zur Rechten ist die rechtsliegende Grenze der untersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden; die hinterste Grenze der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Rechten, und die unterste Grenze der hintersten senkrechten Parallelseite zur Rechten.

VIII. Die unterste hinterste Ecke zur Linken ist die linksliegende Grenze der untersten hintersten wagerecht vorüberlaufenden, die hinterste Grenze der untersten wagerecht herzulaufenden Parallelseite zur Linken, und die unterste Grenze der hintersten senkrechten Parallelseite zur Linken.

Der Mittelpunkt des Cubus liegt hinwärts unter der vordersten, herwärts unter der hintersten wagerecht vorüberlaufenden, links unter der zur Rechten, rechts unter der zur Linken obersten wagerecht herzulaufenden, hinwärts über der vordersten, herwärts über der hintersten wagerecht vorüberlaufenden, links über der zur Rechten, rechts über der zur Linken untersten wagerecht herzulaufenden, links hinter der zur Rechten, rechts hinter der zur Linken vordersten, links vor der zur Rechten, rechts vor der zur Linken hintersten senkrechten Parallelseite.

Der Nutzen dieser Uebungen zum genauen Auffassen der Ortsverhältnisse ist groß, und zur frühsten Vorübung eines systematischen Zusammenfassens von unübersehbaren Folgen. Aber zur geometrischen Unterweisung gehören sie nicht, und führen auch nicht unmittelbar zu abstrakten Formen und Raumverhältnissen. Man wolle mich indeß nicht verurtheilen, daß ich sie hier beiläufig mit

einwebte. Es sollte nur der Unterschied zwischen rein geometrischen und allgemeinen Vorübungen zur Aufhellung des Verstandes praktisch gezeigt, und zugleich angedeutet werden, wie man das früheste Alter, versteht sich mit Einmischung von passenden Fragen, die sich auf das Gelernte beziehen, zu einem systematischen Zusammenhange gewöhnen könne. Ermüdend für den Elementarschüler (um des Schülers Willen ist der Lehrer da,) sind sie nicht, sondern vielmehr reizend, und indem sie fixiren und das Fremdartige hinweg lassen, gewöhnen sie, allein der Sache, nicht fremdartigen Dingen, Aufmerksamkeit zu widmen, und an eigener Kraftübung Interesse zu finden. Das Urtheil ist aus der Erfahrung, aus keinen priorischen Gründen geschöpft; wer ihm nicht glaubt, der prüfe und erfahre auch, ehe er urtheilt.

---

§. 47. Fig. 116.

Zwei und zwei Parallelflächen über einander, die sich selbst gleich sind, und zwei sich selbst gleiche Seitenflächen zur Rechten und Linken, und zwei sich selbst gleiche Flächen, von der eine zu vorderst, die andere zu hinterst liegt, bilden ein Parallelepipedon.

Wenn die sechs Flächen, aus welchen das Parallelepipedon zusammengesetzt ist, Rechtecke sind, so ist es ein gerades Parallelepipedon, sind sie aber Rhomben und Rhomboiden, so ist es ein schräges Parallelepipedon.

Wenn die obersten Flächen Quadrate sind, so sind alle vier Seitenflächen gleiche Parallelogramme; wenn die Seitenflächen den übereinanderliegenden Flächen gleich sind, so ist das Parallelepipedon ein Cubus.

§. 48. Fig. 117.

Zwei Flächen eines Rechtecks neben einander, und zwei ihnen gleiche über einander gelegt, so, daß die vorderste und hinterste zwischen allen vier

Rechtecksflächen eingeschlossene Fläche eine Quadratfläche sey, bildet eine Säule oder ein viereckiges Prisma.

Man legt zwei Flächen eines gleichseitigen Dreiecks vor einander in einer beliebigen Entfernung. Auf jeder Seite derselben liegt die Fläche eines Rechtecks, dessen Breite der Länge der Seiten gleich ist. Dadurch sind drei Flächen so verbunden, daß sie die verlängerte Gestalt des gleichseitigen Dreiecks darstellen, und diesen so gebildeten Körper nennt man ein dreieckiges Prisma.

Ein Prisma, dessen Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht stehen, heißt ein gerades oder senkrechtes Prisma. Ein Prisma, das vier Seitenflächen hat, heißt ein viereckiges, und ein Prisma, das noch mehrere Seiten hat, heißt ein vielseitiges Prisma. Die Seitenflächen eines Prisma haben rechte Ecken; die vordersten und hintersten Flächen haben rechte Winkel, wenn es ein säulenförmiges oder viereckiges Prisma ist; hat zwei oder drei spitze Winkel, wenn es ein schiefes Prisma ist; drei gleiche spitze Winkel, wenn es ein regelmäßig schiefes Prisma ist.

Wenn man zwei Pentagone in einer Entfernung denkt, und die gegenüberliegenden Seiten des Pentagons durch Flächen der Rechtecke, deren Breite gleich ist den Pentagonseiten, verbindet, so entsteht ein fünfeckiges Prisma. Dieses hat sieben Flächen, funfzehn Seiten, dreißig Winkel. Die Winkel der Pentagonflächen sind stumpfe Winkel, die Winkel der Seitenflächen sind rechte Winkel.

Da man sich je zwei und zwei Seiten von zwei Polygonen immer auf dieselbe Weise durch Rechtecke verbunden denken kann, so giebt es überhaupt so vielseitige Prismata, als es Polygone giebt.

§. 49. Fig. 118.

Wenn auf eine gleichseitige Dreiecksgrundfläche drei der Grundfläche gleiche Seitenflächen gesetzt werden, welche sich vereinen, so entsteht eine Figur, welche überall die Flächen des Dreiecks darstellt, die sich alle in einer gemeinschaftlichen Ecke endigen. Eine solche Figur heißt eine Pyramide. Wenn die Grundfläche ein Dreieck ist, so ist die Figur eine dreieckige Pyramide rc. So viel als die Grundfläche Seiten hat, so viel Flächen hat die Pyramide. Aber alle Seitenflächen sind allezeit Dreiecke, und alle laufen in eine gemeinschaftliche Ecke zusammen. Wenn eine Pyramide zwischen ihrer Grundfläche und Spitze durchschnitten wird, so enthält der untere Theil eine Grundfläche und eine Oberfläche, der obere Theil hingegen enthält noch die unveränderte Gestalt des Prisma, daher heißt jener eine abgestutzte Pyramide; wenn diese Oberfläche mit der Grundfläche parallel läuft, so heißt der untere Theil eine parallel abgekürzte Pyramide.

§. 50. Fig. 119.

Wenn man eine Polygonfläche zur Basis macht, und an eine jede derselben so viel congruente Flächen setzt, als die Basis selbst hat, und damit fortfährt, bis sich die Flächen schließen, so entsteht ein Körper, welcher allenthalben der Grundfläche ähnliche Flächen darstellt; ein Körper, der aus lauter Polygonflächen zusammengesetzt ist, heißt ein Polyedron.

B. Runde Körper.

§. 51. Fig. 120.

Eine regelmäßig krumme Fläche, welche allenthalben sich gleichförmig in sich selbst zieht, um-

schließt einen körperlichen Raum, welcher gleichförmig gerundet ist; und ein solcher gleichförmig gerundeter, nur von einer einzigen Fläche umschlossener Raum heißt eine Kugel.

Derjenige Punkt innerhalb der Kugel, welcher von allen Punkten der Fläche in gleicher Entfernung gedacht werden kann, ist der Mittelpunkt der Kugel.

Diejenige gerade Linie, welche von irgend einem Punkt der Kugelfläche durch den Mittelpunkt bis zu dem entgegengesetzten Punkt derselben Kugelfläche gezogen werden kann, heißt ein Diameter, und diejenige Linie, welche nur bis zum Mittelpunkt gedacht wird, heißt ein Halbmesser oder Radius.

Wenn man von der Kugel ein Stück abschneidet, so entsteht unten eine gerade Fläche, welche einen Theil der Kugelfläche über sich hat, und ein solcher Abschnitt aus einem Theil der Kugelfläche und einer geradlinichen Fläche, heißt ein Segment der Kugel.

Wenn aber dieser Schnitt durch das Centrum geht, so entstehen zwei Segmente, welche den größten Umfang zur geradlinichen Fläche, und die halbe Kugelfläche über sich haben. Diese Segmente werden Halbkugeln oder Hemisphären genannt.

Wenn aber ein Kugelschnitt von zwei Seiten geschieht, so hat das ausgeschnittene Stück zwei geradliniche Flächen, einen Theil der Kugelfläche, und eine gerade Linie, die der Kugelfläche entgegengesetzt ist. Dieser Kugelschnitt heißt ein Sector.

Wenn von einer Kugel zwei Segmente so abgeschnitten werden, daß die Flächen der Segmente parallel laufen, so bleibt von der Kugel noch übrig eine radförmige Rundung, welche von einer Kugelperipherie und zweien Flächen eingeschlossen ist;

diese radförmige Rundung heißt ein Gürtel oder eine Zone *).

Wenn eine Kugel in Bewegung gedacht wird, so muß man sich den Mittelpunkt mit zwei entgegenstehenden Punkten in Ruhe denken, um die sich die anderen Theile bewegen. Die so ruhenden Punkte heißen Pole. Wenn man sich auf einer Kugelfläche ein Dreieck denkt, so nennt man dasselbe ein sphärisches Dreieck.

§. 52. Fig. 121.

Wenn zwei Scheiben genommen, und durch regelmäßig gerundete Flächen mit einander verbunden werden, so entstehet ein Körper, welcher überall die Gestalt der Scheibe fortsetzt, und als ein fortgesetztes Rad angesehen werden kann, ein solcher regelmäßig gerundeter, von zweien Scheiben eingeschlossener Körper heißt ein Cylinder (Walze).

Diejenige Linie, welche man sich durch die Mitte des Cylinders mit den Seiten parallel gezogen denken kann, heißt die Axe des Cylinders. Wenn die Grund- und Oberfläche des Cylinders wagerecht liegen, so heißt er ein gerader, wenn sie schief geschnitten sind, ein schiefer Cylinder.

Wenn ich den geraden Cylinder so durchschneide, daß die geradliniche Fläche mit der Axe parallel läuft, so ist die abgeschnittene Fläche die Fläche

*) Die Schnitte, welche sich in die Kugel thun lassen, geben eine zahllose Mannichfaltigkeit, und bieten den Uebungen zum Auffassen der Gestalten ein großes und zugleich interessantes Feld dar. Die Natur weiß sie zu combiniren, und durch Vervielfältigung der Combination Abwechselung in ihrem Bilden zu erzeugen, nicht durch eine Masse von Elementargestalten. Wer verständig die Elemente auffaßt und verfolgt, dem wird die Regelmäßigkeit bei der Mannichfaltigkeit ergötzen. Wer nicht das Einfache sehen und aufzufinden versteht, dem zeigt sie sich als ein Chaos, in dem sich freilich nur das innere Chaos spiegelt.

eines Rechtecks, und wenn die Grundfläche schief liegt eine Rhomboide.

Wenn der Schnitt mit der Grundfläche parallel läuft, so stellt die abgeschnittene Fläche einen mit der Grundfläche gleichen Cirkel dar. Wenn der Abschnitt schief geschieht, so stellt die abgeschnittene Fläche eine Ellipse dar. Wenn zwei Cylinder eine gemeinschaftliche Axe haben, so daß die Grundflächen concentrische Kreise sind, so heißen sie concentrisch. Der Unterschied, welcher zwischen dem kleinern und größern Cylinder statt findet, heißt eine cylindrische Röhre oder ein cylindrischer Ring. Der Durchmesser der kleinern Grundfläche dieser concentrischen Cylinder heißt die inwendige, und der Durchmesser des größern die auswendige Weite. Wird ein Cylinder durch seine Axe nach verschiedenen Richtungen mittelst einer Ebene geschnitten, so heißt das dadurch entstehende Stück ein cylindrischer Ausschnitt.

Fig. 122.

Wenn man auf eine Scheibe eine Dreiecksfläche setzt, und diese regelmäßig und gleichförmig in sich selbst zieht, so entsteht ein Körper, welcher von der Scheibe aus sich cirkelförmig rundet, und nach oben verengt, bis er sich in einer einzigen Spitze endet; und ein solcher cirkelförmig gerundeter, nach oben sich verengender, und in einer Spitze sich endigender Köper heißt ein Kegel oder ein Conus.

Die scheibenförmige der Spitze entgegengesetzte Fläche ist die Grundfläche, und die krumme Fläche, welche die Seiten begrenzt, heißt die Kegelfläche; beide zusammen bilden die ganze Oberfläche des Kegels; jede gerade Linie, welche man von der Spitze bis nach der Peripherie der Grundfläche ziehen kann, heißt die Seite des Kegels. Die

gerade Linie, welche von der Spitze durch den Kegel nach dem Mittelpunkt der Grundfläche gedacht werden kann, ist die Axe. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche ist die Höhe desselben. Wenn man von der Spitze des Kegels aus von zwei Seiten ein Stück des Kegels ausschneidet, so ist das ausgeschnittene durch die Axe, einen Theil der Kegelfläche und zwei geradlinichen rechtwinklichen Dreiecksflächen begrenzte Stück ein Sector des Kegels.

Wenn der Kegel zwischen der Spitze und Grundlinie mit der Grundfläche parallel geschnitten wird, so heißt das von diesen beiden Ebenen oben und unten begrenzte Stück ein abgekürzter Kegel. Ist die oberste Ebene mit der Grundfläche parallel, so heißt dasselbe Stück ein parallel abgekürzter Kegel. Die Entfernung beider Grundflächen ist die Höhe, die Linie von der einen zur andern die Axe, der Ausschnitt zwischen den beiden Flächen der Sector des parallel abgekürzten Kegels. Wenn die Axe auf dem Mittelpunkt der Grundfläche senkrecht steht, so ist der Kegel ein gerader, wenn sie schief steht, ein schiefer Kegel. Die Spitze des schiefen Kegels ist nicht von allen Punkten der Peripherie-Grundfläche in gleicher Entfernung, und die Seiten sind nicht einander gleich; daher heißt der gerade Kegel auch ein gleichseitiger, der schiefe ein ungleichseitiger Kegel.

Alle Seiten vereinigen sich in der Spitze des Kegels, und bilden daher, wenn sie auf beiden entgegenstehenden Seiten gedacht werden, ein Dreieck. Wenn dieser Winkel, welchen die Seiten an der Spitze bilden, ein rechter Winkel ist, so heißt der Kegel ein rechtwinklicher, bilden sie einen spitzen, so heißt er ein spitzwinklicher, und bilden sie einen stumpfen, so heißt er ein stumpfwinklicher Kegel.

Wenn die Spitze eines Kegels schräge abgeschnitten wird, so entsteht eine Ellipsenfläche, geschieht der Abschnitt unterhalb der Spitze in perpendikulärer Richtung, so ist die dadurch entstandene Fläche eine Hyperbel. Wenn endlich ein Kegel durch eine gerade Fläche mit einer Seite parallel durchschnitten wird, so ist die dadurch entstandene geradliniche Fläche eine Parabelfläche.

Des

Lehrbuchs

der

geometrischen Verhältnisse

zweite Abtheilung.

Winkelverhältnisse.

Zweiter Cursus

enthaltend

die Uebung im unmittelbaren und mittelbaren Folgern aus der Neigung gerader Linien.

§. 1.

a) Wenn eine senkrechte oder schräge Linie auf einen vom Anfangs- und Endpunkte mehr oder weniger entfernten Punkt einer wagerechten Linie fällt, so entstehen zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben. Zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, müssen neben einander liegen, daher heißen sie Nebenwinkel.

b) Zwei Nebenwinkel, welche einen gemeinschaftlichen senkrechten Schenkel haben, sind zwei rechte Winkel. Rechte Winkel sind einander gleich; folglich sind diese beiden Nebenwinkel sich selbst gleich.

c) Zwei Nebenwinkel, welche einen gemeinschaftlichen schrägen Schenkel haben, sind zwei ungleiche Winkel. Der gemeinschaftliche Schenkel neigt sich um eben so viel zu dem einen Theile der Basis, als er sich von dem andern Theile derselben entfernt; folglich wird der eine Winkel um eben so viel größer, als der andere kleiner wird, oder der eine Winkel gewinnt das, was der andere verliert; folglich bleibt die Summe von den beiden Winkeln dieselbe, und ist auch bei diesen ungleichen Nebenwinkeln gleich zwei rechten Winkeln.

Zusatz. Je mehr sich der gemeinschaftliche Schenkel neigt, desto größer wird die Ungleichheit der Winkel, und je größer der eine Winkel ist, desto kleiner muß der andere werden.

§. 2. Fig. 3.

Scheitelwinkel.

a) Zwei Linien, welche sich in ihrem Mittelpunkte rechtwinklich durchkreuzen, bilden vier rechte Winkel. Rechte Winkel verhalten sich gleich, folglich sind diese vier Scheitelwinkel einander selbst gleich.

Fig. 4.

b) Eine wagerechte Linie, welche von einer schrägen durchkreuzt wird, bildet ungleiche Scheitelwinkel. Der oberste Theil der schrägen Linie neigt sich um eben so viel abwärts zum zweiten Theile der wagerechten Linie, als sich der unterste Theil der schrägen Linie aufwärts zum ersten Theile der wagerechten Linie neigt; folglich sind beide entgegengesetzte spitze Winkel einander gleich. — Eben so neigt sich der oberste Theil der schrägen Linie eben so sehr abwärts von dem ersten Theil der wagerechten Linie, als der unterste Theil der schrägen Linie aufwärts von dem zweiten Theile der wagerechten Linie *); folglich sind auch die beiden entgegengesetzten stumpfen Winkel einander gleich. Die entgegengesetzten Winkel nehmen folglich in gleichem Verhältnisse zu und ab, oder: die beiden ersten entgegengesetzten Winkel verlieren das, was die beiden andern gewinnen; folglich ist die Summe aller vier ungleichen Scheitelwinkel gleich vier rechten Winkeln.

Zusatz. Je mehr sich die schräge Linie neigt, desto spitzer und desto stumpfer werden die entgegengesetzten Winkel. Wenn durch denselben Punkt noch eine Linie oder mehrere andere Linien gezogen werden, so mehrt sich die Anzahl der Winkel zwar, aber

*) Alles dieß verhält sich umgekehrt, wenn die schräge Linie sich nach der andern Seite neigt, oder wenn sie linkssteigend ist.

aber jeder einzelne ist dafür auch um eben so viel kleiner, und der Inhalt ist in allen Fällen derselbe. Um einen Punkt herum können nicht mehr als vier rechte Winkel liegen.

Fig. 5.

c) Vier Scheitelwinkel werden durch zwei sich durchkreuzende Linien in acht Scheitelwinkel getheilt. Die Summe der Scheitelwinkel ist vier rechte Winkel. Da nun durch diese Theilung keine andern Winkel entstehen, sondern alle um denselben Punkt liegen, so kann auch die Summe derselben Winkel keine andere, als die Summe von vier rechten Winkeln seyn.

§. 3. Fig. 6.

a) Parallellinien *), welche von einer senkrechten und schrägen Linie durchschnitten werden. Da diese durchschneidenden Linien gerade sind, und folglich in derselben Richtung bleiben, so müssen die Parallellinien von den durchschneidenden Linien gleichwinklich, das heißt, so durchschnitten werden, daß die Durchschneidungslinien mit jeder Parallellinie Scheitelwinkel bilden; denn die Richtung der Parallellinien ist ebenfalls immer dieselbe, folglich muß auch die Neigung dieselbe seyn. Eine gerade Linie also, welche mehrere Parallellinien durchschneidet, bildet mit einer jeden derselben gleiche Winkel.

Fig. 6.

b) Diejenigen Winkel also, welche bei den verschiedenen Parallellinien an derselben Seite der Schneidungslinie liegen, verhalten sich gleich. Die beiden entgegensetzten Winkel sind Scheitelwinkel, und also auch einander gleich; folglich ist jeder oberste Win-

*) Auf die größere oder kleinere Anzahl kommt hier nichts an.

kel gleich dem entgegenstehenden untersten, und jeder unterste gleich dem entgegenstehenden obersten. Ueberhaupt sind alle diejenigen Winkel, welche auf gleichen Seiten der Parallellinien und der Durchschneidungslinie liegen, einander selbst gleich, und verhalten sich zu den auf den entgegenstehenden Seiten liegenden Winkeln wie entgegenstehende Scheitelwinkel, das ist gleich.

c) Wenn sich daher auch die Linien nicht durchschneiden (Fig. 6), sondern eine oder mehrere gerade Linien sich nur mit zweien Parallellinien vereinen, so ist dieselbe Linie in Beziehung auf die oberste Parallellinie als unterster, und in Beziehung auf die unterste als oberster Theil einer Schneidungslinie anzusehen; folglich neigt sich eine schräge Linie zwischen zwei Parallellinien eben so viel aufwärts zu der obersten, als sie sich abwärts zu der untersten neigen muß. Die Neigung ist also wechselsweise gleich, daher verhalten sich auch die Winkel wechselsweise gleich. Alle Wechselwinkel sind einander gleich.

§. 4. Fig. 7.

a) Zwei Parallellinien neigen sich zu einer dritten, mit der sie sich vereinen, gleich, und bilden daher auch mit derselben gleiche Winkel. Jede einzelne der beiden Parallellinien bildet mit der dritten zwei Nebenwinkel, oder die Summe von zweien rechten Winkeln. Die Winkel, welche auf gleichen Seiten der Parallellinien liegen, sind einander gleich. Der rechtsliegende Winkel der Parallellinie zur Linken ist daher gleich dem rechtsliegenden Winkel der Parallellinie zur Rechten; der rechtsliegende Winkel zur Rechten bildet mit dem innerhalb der Parallellinien liegenden Winkel zur

Linken derselben Parallellinie Nebenwinkel, oder die Summe von zweien rechten Winkeln; folglich wird auch der diesem äußern Winkel entgegenstehende gleiche innere Winkel, welchen die Parallellinie zur Linken bildet, mit dem gegenüberliegenden innern Winkel der rechtsliegenden Parallellinie die Summe zweier Nebenwinkel bilden; folglich machen die gegenüberliegenden Winkel zweier Parallellinien, welche auf einer dritten Linie ruhen, die Summe von zweien rechten Winkeln aus.

Fig. 8.

b) Dieselben Parallellinien werden durch eine dritte gerade Linie verbunden, folglich sind die entgegenstehenden Winkel Wechselwinkel, und Wechselwinkel verhalten sich gleich; also ist der unterste innere Winkel gleich dem obersten inneren.

Fig. 9.

c) Werden dieselben Parallellinien durch beide Linien sowohl an ihren entgegengesetzten, als auch an ihren untersten Enden verbunden, und wird die unterste Linie verlängert, so entstehen sechs Winkel. An der Parallellinie zur Rechten sind drei Winkel. Der äußerste ist gleich dem entgegenstehenden untersten inneren, welchen die Parallellinie mit derselben Grundlinie bildet; der mittlere und der oberste innere sind Wechselwinkel, und also auch gleich; beide äußere zusammengenommen sind daher gleich den beiden entgegenstehenden innern Winkeln.

d) Mit dem dritten neben ihnen liegendem innern Winkel bilden die beiden äußern Nebenwinkel. Da die beiden äußern den beiden entgegenstehenden innern gleich sind, so müssen diese beiden innern mit dem dritten auch die Summe der Nebenwinkel ausmachen, und diese ist gleich zwei

rechten Winkeln. Nun schließen die drei verbundnen Linien, welche die innern Winkel bilden, ein Dreieck ein, und die Summe der Winkel dieses Dreiecks ist also gleich zweien rechten Winkeln.

Fig. 10.

α) In jedem Dreieck kann jede Seite als gemeinschaftlicher Schenkel eines innern und äußern Winkels angesehen werden. Da nun ein gemeinschaftlicher Schenkel Nebenwinkel bildet, so sind auch die nebeneinanderliegenden innern und äußern Winkel eines Dreiecks Nebenwinkel.

β) An einem jeden äußern Winkel kann eine mit der entgegengesetzten Seite des Dreiecks parallel laufende Linie angesetzt werden. Diese theilt dann den äußern Winkel in zwei Theile, von welchen der zu äußerst gelegene dem entgegenstehenden innern, und der zu innerst gelegene Theil des äußern Winkels demjenigen innern Winkel des Dreiecks, mit dem die dritte Seite Wechselwinkel bildet, gleich ist; folglich ist der ganze äußere Winkel eines jeden Dreiecks gleich den beiden entgegenstehenden innern Winkeln.

γ) Umgekehrt sind die zwei innern Winkel allezeit gleich dem entgegenstehenden äußern; dieser ist mit dem dritten innern Winkel des Dreiecks gleich zweien rechten Winkeln, folglich müssen auch zwei innere Winkel eines Dreiecks mit dem dritten gleich seyn zweien rechten Winkeln.

Resultat. Die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks ist gleich zweien rechten Winkeln.

Folgesätze.

1) Ein rechtwinkliches Dreieck hat einen rechten und zwei spitze Winkel. Die Summe aller drei Winkel ist zweien rechten gleich; folglich müssen die beiden spitzen Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks zusammen gleich seyn einem rechten Winkel *).

2) In einem stumpfwinklichen Dreieck beträgt der stumpfe Winkel mehr als ein rechter; folglich muß der Inhalt der beiden spitzen Winkel eines stumpfwinklichen Dreiecks weniger seyn, als ein rechter Winkel.

Die beiden spitzen Winkel sind gleich dem Reste, welcher dem stumpfen Winkel noch fehlt, um zweien rechten Winkeln gleich zu seyn; oder, der stumpfe Winkel ist so viel mehr als ein rechter Winkel, als dem spitzen Winkel fehlt, um einem rechten gleich zu seyn.

3) Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks verhalten sich gleich, und da die Summe aller drei gleich ist zweien rechten Winkeln, so ist ein jeder Winkel der dritte Theil von zwei rechten Winkeln, oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, das ist, $\frac{2}{3}$ von $90° = 60°$; also beträgt ein jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60°, das ist, der Cirkelbogen, welcher zwischen zwei Seiten gezogen werden könnte, würde 60° der Peripherie enthalten.

4) Die Summe der beiden Basiswinkel in einem gleichschenklichen Dreieck ist weniger als zwei rechte Winkel, das Fehlende enthält der Scheitelwinkel. Die Basiswinkel sind einander gleich; wenn daher der Inhalt des Scheitelwinkels bekannt

*) Man vergleiche zu diesem und den folgenden Sätzen die Dreiecke auf der Tabelle zu dem ersten Cursus.

ist, so hat ein jeder Basiswinkel ein Halb des Restes, der nach Abzug des Scheitelwinkels von zwei rechten Winkeln bleibt.

Anmerkung. Wenn der Scheitelwinkel $\frac{1}{2}$ eines rechten Winkels oder 45° betrüge, so ist die Summe der beiden Basiswinkel gleich $\frac{3}{2}$ eines rechten Winkels, und ein jeder betrüge $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{2}$, das ist $\frac{3}{4}$ eines rechten Winkels oder $67\frac{1}{2}$°.

5) Wenn der Inhalt eines Basiswinkels bekannt ist, so ist der andere dem bekannten gleich, und der Scheitelwinkel ist der Rest, welcher nach Abzug der beiden Basiswinkel von zwei rechten übrig bleibt.

Anmerkung. Zur Uebung können hier einige Aufgaben folgen.

6) Wenn ich zwei oder mehrere Dreiecke mit einander vergleiche, und ich weiß, daß diese einen gleichen Winkel haben, so weiß ich auch den Inhalt der beiden übrigen Winkel; denn ich darf nur von zwei rechten Winkeln die Summe abziehn, welche der eine Winkel enthält, so giebt der Rest den Inhalt der beiden andern Winkel der Dreiecke. Die Gleichheit der Winkel entsteht durch eine gleiche Neigung ihrer Schenkel. Da die Winkel der Dreiecke durch die Neigung der Seiten gebildet werden, so müssen sich die Seiten der verschiedenen Dreiecke, welche einen gleichen Winkel einschließen, gleich neigen.

7) Wenn sich in zwei oder mehrern verschiedenen Dreiecken zwei und zwei Winkel gleich verhalten, so ist dadurch auch die Größe des dritten Winkels bestimmt. Denn der dritte Winkel enthält den Rest von zwei rechten Winkeln, welcher nach Abzug der beiden bekannten Winkel entsteht. Da nun die abgezogenen Winkel der verschiednen Dreiecke sich gleich verhalten, so müssen sich auch die beiden dritten Winkel, welche Reste nach Abzug

gleicher Theile von gleichen Ganzen sind, einander gleich seyn. Die Gleichheit der beiden Winkel setzt voraus, daß sich zwei und zwei Schenkel zu einem dritten gleich neigen, und die Gleichheit der beiden dritten Winkel, daß sich die beiden Schenkel zu sich selbst auch gleich neigen müssen. Wenn sich also zwei und zwei Seiten zu einer dritten gleich neigen, so müssen sie sich auch zu sich selbst gleich neigen, und wenn sich zwei und zwei Seiten zweier Dreiecke zur dritten gleich neigen, so sind alle drei Winkel dieser verschiednen Dreiecke gleich. Dreiecke, deren Seiten sich gleich neigen, haben gleiche Gestalt.

8) Da allemal drei Winkel eines Dreiecks genau zwei rechte Winkel enthalten, so sind zwei Winkel eines Dreiecks immer weniger, als zwei rechte Winkel; der dritte Winkel giebt den Unterschied an, welcher zwischen zwei Winkeln eines Dreiecks und zwei rechten Winkeln statt findet.

Fig. 12.

9) Zwei Diagonallinien theilen die vier rechten Winkel eines Quadrats in acht spitze Winkel, und die Quadratfläche in vier gleichschenkliche Dreiecke, von welchen jede Quadratseite die Basis, und zwei und zwei halbe Diagonallinien die gemeinschaftlichen gleichen Schenkel sind. Die beiden Basiswinkel eines jeden dieser Dreiecke sind zusammen gleich einem rechten Winkel. Da nun die Winkel jedes Dreiecks gleich sind zwei rechten Winkeln, so muß jeder Scheitelwinkel eines jeden dieser Dreiecke ein rechter Winkel seyn; folglich bilden zwei Diagonalen in einem Quadrat vier rechte Scheitelwinkel.

10) Die Diagonallinien in einem Parallelogramme theilen die vier rechten Winkel auch in acht spitze Winkel, die sich aber nur wechselsweise

gleich verhalten, oder Wechselwinkel sind. Eine Diagonallinie theilt ein Rechteck in zwei Dreiecke. Da zwei und zwei Seiten derselben Parallellinien zwischen Parallellinien sind, und die Diagonallinie die gemeinschaftliche dritte Seite für beide Dreiecke ist, so sind die Seiten des einen Dreiecks gleich den Seiten des andern. Eben so verhält es sich auch mit den Winkeln; denn es sind Wechselwinkel und rechte Winkel; folglich sind beide Dreiecke völlig gleich.

a) Zwei Diagonallinien, welche sich durchkreuzen, theilen ein Rechteck in vier gleichschenkliche Dreiecke, von welchen jede Seite des Rechtecks die Basis, und je zwei und zwei halbe Diagonallinien die beiden gleichen Schenkel sind. Die entgegengesetzten Scheitelwinkel an den Durchschneidungspunkten der Diagonallinien verhalten sich gleich. Die Winkel an jeder Seite des Parallelogrammes können angesehen werden als die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks, und diese verhalten sich ebenfalls gleich. Nun bildet eine und dieselbe Diagonallinie mit den entgegenstehenden Seiten Wechselwinkel; folglich sind auch die Basiswinkel der entgegenstehenden Seiten einander gleich; also sind die entgegenstehenden durch die Diagonallinien und die Seiten entstandenen Dreiecke gleichwinklich.

b) Die Scheitelwinkel, welche die Diagonallinien eines Rechtecks bilden, verhalten sich ungleich. Diejenigen nämlich, welche den größten Seiten entgegenstehen, sind stumpf, und die, welche den kleinern Seiten entgegenstehen, sind spitz; daher sind auch die Dreiecke der aus den Diagonallinien und den größern Seiten der Rechtecke entstandenen gleichschenklichen Dreiecke stumpfwinklich, hingegen die aus den kleinern Seiten und der halben Diagonallinie gebildeten spitzwinklich.

Fig. 15.

c) Die Diagonallinien eines Rhombus oder einer Rhomboide sind und neigen sich ungleich. Die Diagonallinien der entgegengesetzten spitzen Winkel neigen sich mehr zu den Seiten der Raute, als die der stumpfen Winkel; da nun ein jedes Dreieck zu seiner Seite eine Diagonallinie hat, so sind auch die Basiswinkel dieser dadurch entstandenen Dreiecke einander ungleich, und die ganzen Dreiecke sind ungleichseitig.

11) Jede viereckige Figur hat vier Ecken; werden zwei derselben durch eine Diagonallinie verbunden, so entstehen zwei Dreiecke; die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks ist zwei rechte Winkel; folglich ist die Summe der Winkel eines Vierecks vier rechte Winkel; denn es kann ja in zwei Dreiecke getheilt werden; also ist auch die Summe der Winkel eines Trapezions gleich vier rechten Winkeln.

Anmerkung. Man kann allerdings in einer jeden viereckigen Figur zwei Diagonallinien ziehen; dann entstehen vier Dreiecke, die also natürlich zusammen acht rechte Winkel ausmachen. Allein dann sind diese Winkel nicht mehr alle mit den Seiten des Vierecks gebildet, sondern vier Scheitelwinkel, das ist, vier rechte Winkel sind durch die Durchkreuzung der Diagonallinien entstanden, und mithin neu hinzugekommen. Man ziehe sie ab, so bleiben wieder nur vier rechte Winkel übrig.

12) Wenn ein Trapezion zwei rechte Winkel hat, so müssen die beiden andern entgegenstehenden ungleichen Winkel zweien rechten Winkeln gleich seyn (man betrachte die beiden ungleichen Winkel). Mit dem äußern Winkel bildet ein Jeder Nebenwinkel, und folglich auch die Summe von zwei rechten Winkeln. Der stumpfe Winkel (s) ist mehr als ein rechter Winkel, und um so viel, als der äußere Winkel (o) weniger als zwei rechte Winkel.

Mit dem entgegenstehenden innern Winkel (r) ist er ebenfalls gleich zweien rechten Winkeln. Da nun ein und derselbe Winkel (s) sowohl mit dem entgegenstehenden innern (r), als auch mit dem neben ihm liegenden äußern (o) zwei rechte Winkel bildet, so müssen diese beiden spitzen Winkel, deren ein Jeder mit demselben stumpfen Winkel bildet, sich selbst gleich seyn; folglich ist der innere ungleiche Winkel gleich dem entgegenstehenden äußern (r = o). Dagegen bildet auch der innere spitze Winkel mit seinem äußern stumpfen Winkel (p) ebenfalls zwei rechte Winkel; desgleichen geschieht mit dem entgegenstehenden innern stumpfen Winkel (s); folglich ist der innere stumpfe Winkel gleich dem entgegenstehenden äußern (s = p). Es geht also daraus hervor: Wenn ein Trapezion zwei rechte Winkel hat, so ist ein jeder der andern ungleichen Winkel gleich dem entgegenstehenden äußern.

Fig. 16.

13) Wenn um einen und denselben Punkt mehr als vier gleiche Winkel liegen, so ist ein jeder einzelne weniger als ein rechter Winkel. So viel als gleiche Winkel um einen Punkt liegen, in so viel Theile sind die vier rechten Winkel getheilt, und jeder enthält dann eine Anzahl gleicher Theile. Wenn um einen Punkt sechs gleiche Winkel liegen, so enthält ein jeder einzelne den sechsten Theil von vier rechten Winkeln, das sind also zwei Drittheile eines rechten Winkels. Werden zwei solche einen gemeinschaftlichen Punkt durchkreuzende Linien durch eine dritte Linie verbunden, so entstehet ein Dreieck, dessen Scheitelwinkel $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels enthält, und dessen Basiswinkel daher $\frac{4}{3}$ oder 1 und $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen.

Polygon.

a) Das Centrum eines jeden **regelmäßigen Polygons** kann angesehen werden als ein Punkt, um welchen mehrere gleiche Winkel liegen. Die Linien, welche aus den Polygonwinkeln bis zum Centrum gehen, sind alle gleich lang. Zwei von diesen Linien bilden allezeit mit einer Polygonseite ein gleichschenkliches Dreieck (Polygondreieck), und es müssen folglich durch jene Linien eben so viel Dreiecke entstehen, als das Polygon Seiten hat. Da die gedachten Linien alle gleich lang sind, und auch die Polygonseiten sich gleich verhalten, so haben alle die Dreiecke gleiche Seiten, schließen gleiche Winkel ein, und sind folglich sich selbst gleich. Jede Polygonseite ist die Basis eines dieser Dreiecke, und ein **Centriwinkel** ist sein Scheitelwinkel; folglich hat auch jedes Vieleck eben so viel Centriwinkel als es Seiten hat, und umgekehrt, so viel Seiten ein Polygon hat, so viel gleiche Polygondreiecke können gebildet werden.

Fig. 17.

b) Aus dem Centrum eines regelmäßigen Fünfecks gehen Linien in die Pentagonwinkel, und bilden mit den Pentagonseiten fünf gleichschenkliche Pentagondreiecke, deren Scheitelwinkel Centriwinkel sind. Da die Summe aller Centriwinkel gleich ist vier rechten Winkeln, so muß ein Centriwinkel $\frac{1}{5}$ von vier rechten Winkeln, das ist $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels seyn. Die Basiswinkel eines gleichschenklichen Dreiecks sind gleich dem Reste, welcher nach Abzug des Scheitelwinkels von zwei rechten Winkeln übrig bleibt; folglich haben beide Basiswinkel eines Pentagondreiecks (da sein Scheitelwinkel $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels ist) $\frac{6}{5}$ eines rechten Winkels, und da beide einander gleich sind, so hat einer $\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$ eines rechten Winkels. Ein Penta-

gonwinkel besteht aus zwei Basiswinkeln, und hat also $\frac{6}{5}$ oder $1\frac{1}{5}$ rechte Winkel.

c) Wenn man eine von den Pentagonseiten verlängert, so entsteht ein äußrer Winkel, welcher mit dem neben ihm liegenden innern Winkel zwei rechte beträgt, denn es sind Nebenwinkel. Die Summe der drei Winkel des Pentagondreiecks ist auch gleich zweien rechten Winkeln. Da nun der innre Pentagonwinkel gleich ist den beiden Basiswinkeln, so muß der äußre gleich seyn dem Scheitelwinkel oder einem Centriwinkel des Pentagons, das ist $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels, und alle fünf äußere Winkel zusammen müssen — so wie alle Centriwinkel — gleich seyn vier rechten Winkeln.

§. 5. Fig. 18.

Sechseck oder Hexagon.

d) Da die Summe aller Centriwinkel eines jeden Polygons gleich ist vier rechten Winkeln, so muß ein Centriwinkel eines Sechsecks, oder der Scheitelwinkel eines Hexagondreiecks gleich seyn $\frac{1}{6} \times 4$ rechten Winkeln $= \frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels. Die Basiswinkel eines Hexagondreiecks sind folglich gleich $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels, und ein Basiswinkel $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$, das ist $\frac{2}{3}$; folglich sind alle Winkel eines Hexagondreiecks einander gleich, und daher auch seine Seiten, oder die Hexagondreiecke sind gleichseitig. Ein Hexagonwinkel ist doppelt so groß, als ein Basiswinkel des Hexagondreiecks, und beträgt also $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels. Ein äußerer Hexagonwinkel ist dem Centriwinkel gleich, und beträgt folglich auch $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels.

Anmerkung. Zur Uebung wird es gut seyn, wenn hier der Lehrer die Winkel noch einiger Vielecke be-

rechnen läßt, damit der Schüler auch hierin zur Fertigkeit komme. Hier ist es unnöthig, das Gesagte noch bei andern Vielecken durchzuführen.

e) Da jeder äußre Polygonwinkel gleich ist einem Centriwinkel desselben Polygons, so muß die Summe aller äußern Winkel gleich seyn der Summe aller Centriwinkel desselben Vielecks, das ist vier rechten Winkeln. Da ein innrer Polygonwinkel mit seinem äußern zwei rechte Winkel beträgt, so muß die Summe aller innern und äußern Polygonwinkel zwei Mal so viel rechte Winkel betragen, als das Polygon Seiten hat, weniger vier rechten Winkeln. Zieht man von dieser Summe den Betrag der äußern Winkel, das ist vier rechte Winkel ab, so erhält man den Inhalt aller Polygonwinkel des gegebenen Vielecks, und kann nun — da alle Polygonwinkel gleich sind — auch daraus leicht die Größe eines Polygonwinkels berechnen.

Resultat.

Die Summe aller Winkel eines Polygons ist die doppelte Zahl der Seiten weniger vier rechten Winkeln. Ein Siebenzehneck hat z. B. 2 × 17 weniger 4 = 30 rechte Winkel.

Jeder Basiswinkel eines Polygondreiecks ist ein Halb des Polygonwinkels, und jeder Scheitelwinkel ist der Rest von zwei rechten Winkeln, welcher entsteht, wenn man den Polygonwinkel abzieht.

Fig. 19.

14) Wenn man in einem Cirkel eine Sehne beschreibt, und mit dem Endpunkte derselben zwei Radien verbindet, so bilden diese drei Linien ein Dreieck. Da die Radien eines Cirkels sich gleich verhalten, so hat das Dreieck auch zwei gleiche

Seiten, und ist folglich ein gleichschenkliches Dreieck. Nun sind aber die Basiswinkel eines gleichschenklichen Dreiecks einander gleich, folglich sind auch die beiden an einer und derselben Sehne liegenden Peripheriewinkel, welche durch die Radien mit einer und derselben Sehne gebildet werden, einander gleich.

§. 7. Fig. 20.

Wenn sich zwei Sehnen an der Peripherie eines Cirkels vereinen, so schließen sie einen Peripheriewinkel ein. Verbindet man diese Sehnen mit Radien des Cirkels (cb und cd), so entstehen drei Peripheriewinkel und ein Centriwinkel, dessen Radien denselben Bogen einschließen, als die Sehnen, die den obersten Peripheriewinkel einschließen. Wenn man aus demselben Peripheriewinkel einen Diameter fällt, so wird der Peripheriewinkel und der Centriwinkel durch denselben getheilt. Dadurch entstehen zwei Dreiecke (abc und acd), deren jedes einen Centriwinkel, einen ganzen Peripheriewinkel und einen Theil des obersten Peripheriewinkels faßt. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist zwei rechte Winkel; folglich bildet jeder Centriwinkel mit den ihm gegenübergelegenen Peripheriewinkeln zwei rechte Winkel.

Jeder obere Centriwinkel (das ist x mit p und r mit n) bildet aber auch mit den unter ihm gelegnen Centriwinkeln zwei rechte Winkel (denn beide sind Nebenwinkel); folglich muß auch jeder ungetheilte untere Centriwinkel gleich seyn den beiden über ihm gelegenen Peripheriewinkeln, die durch zwei Radien und eine Sehne gebildet werden. Nun sind die Winkel, welche von Radien und einer Sehne gebildet werden, einander selbst gleich. Wenn ich also je zwei und zwei Winkel des einen und

des andern Dreiecks summire, so geben sie gleiche Summen; folglich sind die beiden obersten (in a gelegenen) Peripheriewinkel gleich den beiden untern.

Denke ich mir nun den Diameter (ag), der nur als Hülfslinie gezogen wurde, hinweg, so bleiben noch drei Peripheriewinkel und ein Centriwinkel übrig.

Der oberste Peripheriewinkel (a) ist gleich den beiden untern, oder gleich der Hälfte von der Summe aller drei Peripheriewinkel. Alle drei Peripheriewinkel sind gleich dem Centriwinkel (dcb); folglich ist auch der oberste Peripheriewinkel in a gleich der Hälfte des Centriwinkels (bcd).

$$
\begin{array}{c}
\angle\angle\ x, b, y + r, q, s = 4R \\
\angle\angle\ x, p + r, n = 4R \\
\hline
\angle\angle\ p + n = b, y + q, s \\
\angle\ y = b \\
\angle\ q = s \\
\hline
y + s = q + b \\
\hline
\angle\angle\ q, b = \tfrac{1}{2}\, b, q + y, s \\
b, q + y, s = p + n \\
\hline
b, q = \tfrac{1}{2}\, p + n
\end{array}
$$

Zusatz. Das Maß des Centriwinkels giebt der Bogen (bgd) an, der ihn einschließt. Daher sagt man: der Centriwinkel hat den Bogen, den er einschließt, zum Maße. Da der Peripheriewinkel ein Halb des Centriwinkels ist, so hat er auch nur die Hälfte des Bogens (bgd) zu seinem Maße, das heißt, der Peripheriewinkel wird nur ein Halb desselben Bogens fassen, wenn man ihn in densel-

den hineinträgt, oder mit gleicher Cirkelöffnung beschreibt.

Folgesätze.

1) Wenn der Peripheriewinkel durch Sehnen gebildet wird, die den Diameter des Cirkels einschließen, so ist der Centriwinkel gleich 0 (oder es ist noch gar kein Centriwinkel vorhanden). Unter dem Diameter liegt aber der Halbcirkel, das sind 180°. Der Peripheriewinkel hat die Hälfte des Bogens zu seinem Maße, folglich faßt er auch ein Halb des Halbcirkels; ein Halb des Halbcirkels ist aber eine Quadrante. Ein Winkel, welcher eine Quadrante faßt, ist ein rechter Winkel; folglich ist ein jeder Peripheriewinkel, dessen Sehnen den Diameter einschließen, ein rechter Winkel, auf welcher Stelle des Halbcirkels er auch stehe.

Fig. 24.

2) Wenn die Sehnen, welche einen Peripheriewinkel einschließen, über einer Sehne liegen, welche mehr als die halbe Peripherie unter sich hat, so ist der Centriwinkel, den ich mir denke, noch weniger als 0; folglich hat auch der Peripheriewinkel mehr als eine Quadrante zu seinem Maße; daher ist der Peripheriewinkel, dessen Sehnen mehr als einen Halbcirkel einschließen, größer als ein rechter Winkel.

Fig. 25.

3) Wenn die Sehnen des Peripheriewinkels einen Bogen einschließen, der weniger beträgt als ein Halbcirkel, so ist auch der Centriwinkel weniger als 0, und der Peripheriewinkel hat einen Bogen zum Maße, der kleiner ist als ein Halbcirkel; folglich ist auch der Peripheriewinkel klei-

kleiner als ein rechter Winkel, wenn der Bogen, den dessen Sehnen einschließen, kleiner ist als ein Halbcirkel.

4) Zwei Sehnen (ae und dc) durchkreuzen sich in b. Die entgegenstehenden abgeschnittenen Theile der verschiednen Sehnen werden wiederum durch Sehnen verbunden (bc und be durch ec, bc und ba durch ac); dadurch entstehen Dreiecke; ein und ein Winkel derselben sind Scheitelwinkel (nämlich ebc und abd), und ein und ein Winkel stehen auf gleichen Bogen (aeb und adc); folglich sind zwei und zwei Winkel dieser Dreiecke einander gleich, und wenn dieß ist, so müssen auch alle drei Winkel, welche die abgeschnittenen und zu Dreiecken verbundenen Sehnen bilden, einander gleich seyn und zu einander eine gleiche Neigung haben:

$$\llcorner\, ebc = \llcorner\, dba$$
$$\llcorner\, adc = \llcorner\, aec$$
$$\overline{\llcorner\, dac = \llcorner\, bce}$$

Fig. 33.

5) In einem Cirkel ist ein Viereck beschrieben. Jeder Winkel desselben ist ein Peripheriewinkel. Die Sehnen, welche einen Peripheriewinkel einschließen, vereinigen sich mit denjenigen, welche den entgegengesetzten bilden; folglich schließt das eine Paar Sehnen den Theil der Peripherie, der unter dem Winkel liegt, ein, das andere Paar den, der über demselben liegt. Beide Paar zusammen genommen schließen also die ganze Peripherie ein, und haben die halbe Peripherie, das ist den Halbmesser, zum Maße. Der Halbmesser beträgt 180°, das sind zwei rechte Winkel; folglich sind in einer jeden innerhalb einer Peripherie gelegnen

viereckigen Figur die entgegengesetzten Winkel gleich zweien rechten Winkeln.

Fig. 27.

6) Zwei Sehnen (ab und ed) durchkreuzen sich, und bilden dadurch Scheitelwinkel (c). Der unterste Scheitelwinkel (acd) ist größer, als der Peripheriewinkel. Ich setze an den Endpunkt der einen Sehne eine dritte, welche mit der ersten gegebenen (ab) parallel läuft; diese dritte Parallelsehne (eg) bildet mit der zweiten (ed) einen Peripheriewinkel, welcher dem untersten Scheitelwinkel (acd) gleich ist (denn Parallelsehnen durch eine dritte gerade Linie verbunden geben gleiche Winkel); dieser Peripheriewinkel (in e) hat die Hälfte des Bogens zu seinem Maße, den der Scheitelwinkel hat, mehr das Stück des Bogens (eb oder ga), welches über dem gedachten Scheitelwinkel oder zwischen den beiden Parallelsehnen liegt; folglich haben die Winkel, welche durch den Durchschnitt zweier Sehnen entstehen, die Hälfte des Bogens über sich, und die Hälfte des Bogens unter sich zu ihrem Maße.

Fig. 28.

7) Ein Winkel, welcher durch zwei Schneidungslinien außerhalb der Peripherie gebildet wird. Ich lege an den Durchschneidungspunkt der einen Secante (ab) eine Sehne (de) an, welche mit der andern Schneidungslinie (ac) parallel läuft. Die Parallelsehne muß mit einer und derselben Schneidungslinie gleiche Winkel bilden. Nun ist aber dieser Winkel ein Peripheriewinkel, und hat also ein Halb desjenigen Bogens, auf dem er steht, zum Maße; folglich hat auch der ihm gleiche, aber außerhalb der Peripherie gelegene Winkel (a), ein Halb desjenigen Bogens

zum Maße, auf welchem die Sehne steht, welche mit der zweiten Schneidungslinie (ab) parallel läuft.

∟ edg hat eg zum Maße,
∟ bag = edg,

folglich hat bag den Bogen eg zum Maße.

Resultate.

a) Wenn Segmente innerhalb der Peripheriewinkel liegend gleich sind, so schließen auch die Sehnen gleiche Bogen ein; folglich sind die innerhalb gleicher Segmente gelegenen Winkel einander gleich.

Umgekehrt.

Zwei oder mehrere gleiche Peripheriewinkel müssen innerhalb gleicher Segmente liegen, oder gleiche Segmente abschneiden.

b) Wenn die Segmente dem Halbcirkel gleich sind, so fassen sie einen rechten Winkel.

Umgekehrt.

Wenn ein Segment einen rechten Winkel faßt (durch einen rechten Winkel abgeschnitten wird), so ist es ein Halbcirkel.

c) Wenn ein Segment kleiner ist, als der Halbcirkel, so faßt es einen stumpfen Winkel.

Umgekehrt.

Wenn ein stumpfer Winkel ein Segment abschneidet, so ist dieses kleiner, als ein Halbcirkel.

d) Wenn ein Segment größer ist, als ein Halbcirkel, so faßt es einen spitzen Winkel.

Umgekehrt.

Wenn der Winkel eines Segments ein spitzer ist, so ist das Segment größer als ein Halbcirkel.

§. 7. Fig. 29.

Ein Kreis weicht in seiner Richtung in jedem Punkte von der geraden Linie ab, und kann daher nur in einem Punkte von einer geraden Linie berührt, aber in zwei Punkten durchschnitten werden.

Eine Tangente kann also die Peripherie nur in Einem Punkte berühren. Der Berührungspunkt der Tangente muß angesehen werden als höchster Punkt eines Halbcirkels, welchen ein mit der Tangente parallel laufender Diameter bildet. Der höchste Punkt einer Peripherie ist aber gerade in der Mitte des Halbcirkels, folglich gerade lothrecht über dem Mittelpunkte des Diameters. Das Centrum des Cirkels muß daher auch gerade lothrecht unter dem Berührungspunkte der Tangente liegen; folglich muß der Radius lothrecht auf der Tangente stehen, mit derselben einen rechten bilden, wenn er sich im Berührungspunkte mit ihr verbindet.

Wenn aber die Linie nicht in oder durch das Centrum, sondern zu irgend einem gegenüberliegendem Punkte der Peripherie geht, oder wenn sie eine Chorde ist, so neigt sie sich auf der einen Seite zu, und auf der andern Seite von der Tangente.

Umgekehrt.

Ist die gerade Linie innerhalb eines Cirkels, welche rechtwinklich mit dem Berührungspunkte der Tangente sich verbindet, der Diameter oder Radius des

Cirkels, und jede Linie, welche sich mit der Tangente im Berührungspunkte so vereint, daß sie einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet, ist eine Sehne.

Folgesätze.

Fig. 30.

1) Die Tangente bildet mit dem Diameter einen rechten Winkel. Eine Sehne (ac) theilt ihn in zwei spitze. Dieselbe Sehne schließt mit einer andern und dem Diameter ein rechtwinkliches Dreieck (acd) ein. Der Peripheriewinkel ist ein rechter Winkel; der getheilte Winkel an der Tangente ebenfalls; die an dem Diameter liegenden spitzen Winkel (py) sind die spitzen Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks, und also auch gleich einem rechten Winkel. Der zwischen der Tangente und der Sehne liegende Winkel (o) mit dem spitzen Winkel (p) des Dreiecks ist gleich einem rechten Winkel; derselbe Winkel des Dreiecks mit dem andern spitzen (y) ist auch gleich einem rechten Winkel; folglich muß der zwischen der Tangente und Sehne gelegene spitze Winkel gleich seyn dem an dem entgegengesetzten Ende des Diameters liegenden spitzen Winkel (o = y).

Fig. 31.

2) Der Winkel der Tangente (ab) mit der Sehne (ac) faßt ein Segment (Bogen ac). Dieses Segment ist das Maß des Peripheriewinkels an dem entgegenstehenden Ende des Diameters (y). Da letzterer nun dem Winkel an der Tangente gleich ist, so hat auch der Winkel an der Tangente ein Halb desjenigen Bogens zum Maße, welchen die Sehne mit der Tangente einschließt.

$$\llcorner o = \llcorner y$$
$$\llcorner y = \llcorner ac$$
$$\overline{\llcorner o = \llcorner ac.}$$

$$o + p = 1 R \llcorner$$
$$y + p = 1 R \llcorner$$
$$\overline{o = p.}$$

Fig. 32.

3) Zwei Tangenten bilden einen spitzen Winkel. Zwei Radien, welche zu den Tangenten gehen, schließen einen stumpfen Winkel ein; mit den Tangenten aber müssen sie rechte Winkel bilden. Die ganze Figur ist ein Trapezion, welches zwei rechte Winkel hat; folglich muß der Centriwinkel mit dem äußern spitzen Winkel auch gleich seyn zweien rechten Winkeln. Nun ist der äußere Winkel des an der Peripherie liegenden spitzen Winkels ebenfalls mit den innern Winkeln gleich zweien rechten Winkeln; folglich ist der äußere Winkel eines an der Peripherie liegenden Winkels gleich dem Centriwinkel, welchen die Radien bilden, die zu den Berührungspunkten der Schenkel desselben gehen.

Verlängert man den einen Radius bis zum Diameter, so bildet der andere mit demselben einen Centriwinkel, der mit dem erstern auch einen rechten Winkel, und folglich auch dem anliegenden spitzen Winkel gleich ist.

Des

Lehrbuchs

der

geometrischen Verhältnisse

dritte Abtheilung.

Dritter Cursus

enthaltend

Längenverhältnisse.

I.

§. 1.

Die Richtung von einem Punkte bis zum andern ist eine Linie. Zwischen zwei Punkten kann nur eine und dieselbe Richtung, folglich auch nur eine gerade Linie seyn. Zwischen zwei Punkten muß es allezeit einen Zwischenraum geben, folglich kann ich mir auch zwischen zwei Punkten allezeit eine Linie denken.

Der Zwischenraum zwischen zwei gegebenen Punkten heißt die Entfernung. Dieser Zwischenraum kann größer oder kleiner seyn, folglich auch die Entfernung.

Die Linie verbindet verschiedene Punkte, und zeigt die Entfernung an, welche zwischen denselben statt findet.

Die gerade Ausdehnung zwischen zwei Punkten nenne ich aber Länge. Wenn zwei Punkte in großer Entfernung von einander sind, so wird die Länge der Linie auch beträchtlich, sind sie einander näher, so sind die Linien auch kürzer.

§. 2. Fig. 1.

Zwei wagerechte Parallellinien AB und CD. Zwischen diesen Parallellinien liegen noch vier senkrechte Parallellinien ef, gh, ik, lm. Da der Raum, welcher zwischen zwei Parallellinien liegt, überall gleich ist, so müssen diejenigen Punkte, welche gerade über einander liegen, auch gleiche Entfernung, und die sie verbindenden senkrechten Parallellinien gleiche Länge haben.

Also senkrechte Parallellinien, welche zwischen wagerechten Parallellinien liegen, sind einander gleich.

Fig. 2.

Zwei wagerechte Parallellinien AB und CD, welche durch drei schräge Linien ro, px, st verbunden werden. Der Punkt r liegt von dem Punkte o in ebenderselben Richtung, als der Punkt p von x, und s von t. Es sind daher die diese Punkte verbindenden Linien Parallellinien. Da sich die Parallellinien nicht nähern, so nähern sich auch die in einer und derselben Richtung liegenden Punkte nicht, folglich sind die drei schrägen Parallellinien, welche zwischen wagerechten Parallellinien liegen, gleich lang.

Zusatz. Diese Wahrheit wird durch den Perpendikel, welcher durch st fällt, auch veranschaulicht. Nämlich aus dem Obigen ging hervor, daß die senkrechten Parallellinien, welche zwischen wagerechten liegen, einander gleich sind. Nun sieht man, daß hier der oberste Punkt s der schrägen Parallellinie von dem obersten Punkte der senkrechten Parallellinie eben so weit entfernt ist, als der unterste Punkt t der erstern von dem untersten Punkte der letztern. Dieß wird auch bei allen andern schrägen Parallellinien der Fall seyn.

Fig. 3.

Zwei schräge Parallellinien AB und DC, welche hinwiederum durch zwei schräge gh und ik verbunden werden. Da die verbindenden Linien in gleicher Richtung laufen, so verbinden sie auch gleich entfernte Punkte, und Linien, welche gleich entfernte Punkte verbinden, haben gleiche Länge; folglich haben auch schräge Parallellinien, welche zwischen andern schrägen Parallellinien liegen, gleiche Länge.

Fig. 4.

Zwei senkrechte Parallellinien, zwischen denen sich Parallellinien von dreifach verschiedener Richtung befinden. Diejenigen Linien, welche gleiche Richtung haben, sind einander gleich, weil sie immer gleich weit entfernte Punkte verbinden.

Es gilt also ganz allgemein der Satz:

Parallellinien, welche zwischen Parallellinien liegen, verhalten sich gleich.

Folgesätze.

1) Fig. 5. Wenn die Linien, welche zwischen Parallellinien liegen, ungleiche Richtung haben, so verbinden sie auch Punkte von ungleicher Entfernung, und folglich sind sie auch von ungleicher Länge. Doch können zwei schräge Linien in entgegengesetzter Richtung laufen, wie rn, om, und zwei Punkte verbinden, die ebenfalls in entgegengesetzter Richtung liegen; dann sind die einander entgegenlaufenden Linien sich gleich. Denn wenn man das oberste Ende der Linie rn auf den unter n gelegenen Punkt, und den Punkt r in dem gerade über ihm liegenden brächte, so würde die Linie rn mit mo ebenfalls parallel laufen.

2) Fig. 6. Gleich lange Parallellinien, welche sich zwischen Parallellinien durchkreuzen, müssen sich auch gleich neigen. Wenn sie in gleicher Entfernung liegen, so durchkreuzen sie sich auch in gleichen Punkten, und wenn die abgeschnittenen Theile der gegebenen Parallellinie gleich sind so wie ad = de = cb = bf, so werden sie sich auch in gleichen Punkten durchschneiden.

3) Eben so müssen Parallellinien, welche zwischen Parallellinien sich durchschneiden, gleiche Theile anderer Parallellinien von verschiedener Richtung

abschneiden, sobald sie selbst in gleicher Entfernung liegen.

4) Wenn sich zwei Linien, welche zwischen Parallellinien liegen, in ihren Mittelpunkten durchkreuzen, so entfernen sie sich unten und oben in gleicher Richtung, und schließen folglich von diesen Parallellinien gleiche Theile ein.

5) Fig. 7. Die entgegenstehenden Seiten eines Parallelograms sind Parallellinien. Die Diagonallinien sind solche Linien, welche zwischen Parallellinien liegen und in ihrem Mittelpunkte durchschneiden. Die Diagonallinien eines Quadrats liegen mit ihren entgegengesetzten Enden gerade perpendikular unter einander. Linien, welche zwischen Parallellinien so liegen, daß die entgegengesetzten Endpunkte gerade unter einander liegen, verhalten sich aber eben so, als Parallellinien, welche zwischen Parallellinien liegen; folglich sind die Diagonallinien eines jeden Rechtecks (also auch des Quadrats) einander gleich.

6) Fig. 8. Die Seiten eines Rhombus sind ebenfalls Parallellinien, von denen die entgegenstehenden sich gleich sind, folglich durchkreuzen sich die Diagonallinien auch in ihren Mittelpunkten, und theilen sich in zwei gleiche Theile. Die entgegengesetzten Endpunkte hingegen liegen nicht perpendikular unter einander, und folglich kann auch die Neigung derselben nicht gleich seyn, und da die Neigung nicht gleich ist, so können sie sich auch nicht verhalten wie Parallellinien zwischen Parallellinien, und folglich auch nicht gleich seyn.

Die Diagonallinien der Rhomboiden sind einander ungleich.

Daraus folgt umgekehrt:

A) Wenn zwei gleich lange Linien sich in ihrem Mittelpunkte durchkreuzen, und sich nach allen

Seiten gleich neigen, so liegen ihre entgegengesetzten Anfangs- und Endpunkte in horizontaler und perpendikularer Richtung, und die zwischen diesen Endpunkten gezogenen Linien sind Parallellinien, die ein Rechteck bilden.

B) Wenn hingegen sich Linien in ihren Mittelpunkten durchkreuzen, ohne sich gleich zu seyn, jedoch so, daß sie gleiche Höhe haben, so sind die zwischen diesen Punkten gezogenen Linien ebenfalls parallel, aber sie bilden einen Rhombus oder eine Rhomboide.

Fig. 9.

8) In einem Quadrate sind zwei Theilungslinien gezogen, welche von dem Mittelpunkte einer Seite bis zum Mittelpunkte der entgegenstehenden gehen. Jede Theilungslinie läuft mit denjenigen Seiten parallel, die sie nicht theilt. Höhe und Breite, folglich auch die Entfernung der entgegenstehenden Seiten, sind einander gleich. Wenn man daher die Theilungslinien von einem Punkte bis zum entgegenstehenden gleich schnell sich bewegend denkt, so begegnen sich beide auf der Hälfte des Weges, das ist in dem Mittelpunkte; daher müssen sie auch gleich lang seyn, und sich in zwei gleiche Theile theilen.

Fig. 10.

9) Wenn hingegen die Entfernung der entgegenstehenden Seiten ungleich ist, so denkt man sich die eine Theilungslinie um eben so viel schneller laufend, als ihr Ziel entfernter ist, und dann begegnen sich auch beide in ihren Mittelpunkten. Dieser Mittelpunkt liegt von allen vier Punkten in gleicher Entfernung, und ist daher der Mittelpunkt des ganzen Parallelograms.

Wenn eine der Theilungslinien eine Seite in ungleiche Theile theilt, so wird auch die entgegenstehende in ungleiche Theile zerlegt.

§. 2. Fig. 11.

Zwei Punkte werden durch eine gerade Linie unmittelbar und ohne einen Umweg verbunden. Wenn ich dieselben beiden Punkte mit einander auf einem andern Wege verbinden will, so muß dieser Weg über oder unter dieser geraden Linie fortgehen. Nun kann aber zwischen zwei Punkten nur eine einzige gerade Linie gedacht werden. Wenn daher eine andere Linie in denselben Punkt gebracht werden soll, so muß sie erst gebrochen werden. Wenn sie gebrochen wird, so muß sie eine andere Richtung nehmen. Wenn sie aber dieß thut, so kann die Verbindung nicht mehr durch eine gerade Linie geschehen, sondern es sind dann zwei gerade Linien von verschiedener Richtung, welche sie bewerkstelligen. Da die gerade Richtung auch zugleich die größte Nähe der vorhandnen Punkte ist, so müssen die beiden andern geraden Linien, welche mittelbar dieselben Punkte verbinden, zusammengenommen länger seyn als die gerade Linie.

Derjenige Bogen, welcher durch denselben Umweg geht, also durch denselben Punkt, wo die zweite gegebene Linie gebrochen ist, nimmt noch von der Richtung der beiden Linien einen Umweg, und daher muß eine krumme Linie, welche zwei gegebene Punkte verbindet, noch länger seyn, als zwei gerade Linien, welche in dem von der geraden Linie am entferntesten liegenden Punkte sich vereinen.

Folgesätze.

1) Die Winkel eines jeden Dreiecks kann man ansehen als drei Punkte, welche durch eine Linie unmittelbar, und durch zwei Linien mittelbar verbunden werden. Die mittelbar verbindenden Linien mußten durch einen dritten Punkt sich selbst verbinden. Die mittelbar verbindenden Linien mußten mit der unmittelbar verbindenden in beiden Punk-

ten sich vereinen, und zwei Winkel bilden; der dritte Punkt wurde erfordert, um sich selbst zu vereinen. Daher entstand eine dreifache Neigung der Linien und dreier Winkel. Nur immer eine Linie giebt die gerade Richtung zu zweien Punkten, die andern beiden deuten den Umweg an, und sind also länger.

Daraus geht hervor:

Zwei Seiten eines Dreiecks müssen zusammengenommen immer länger seyn als Eine.

Fig. 12.

2) Die Richtung der beiden Seiten, welche sich mit den Endpunkten der dritten vereinigen, ist um so geringer, je weniger sie sich von dieser Seite entfernen. Alle Linien in einem und demselben Dreiecke, welche sich mit den Endpunkten einer dritten Seite vereinen, sind dieser dritten Seite näher, als die Seiten des Dreiecks, und müssen daher auch weniger Länge haben, als die beiden andern Seiten. Dagegen müssen sie sich mehr zu der dritten, und weniger zu sich selbst neigen; folglich sind in einem Dreiecke die über eine der Seiten beschriebenen Linien kürzer, als die beiden andern Seiten, schließen aber einen größern Winkel ein.

Fig. 13.

Zwei gerade Linien, welche einen Winkel einschließen, geben, durch eine dritte verbunden, ein Dreieck. Die Verbindungslinie ist an den beiden Endpunkten der Schenkel, und zeigt die Entfernung derselben an.

Wenn sich der eine Schenkel bis über den Mittelpunkt des andern neigt, so muß sich auch die Verbindungslinie bis über denselben Mittel-

punkt neigen; folglich muß sich auch die Verbindungslinie eben so viel neigen, als der erste Schenkel, und folglich auch mit dem letztern einen Winkel bilden, der dem ersten gegebenen gleich ist.

Ferner liegt aber der Mittelpunkt von beiden Endpunkten in gleicher Entfernung; also auch ein jeder gerade über oder unter demselben gelegene Punkt; so ist folglich auch die Verbindungslinie mit dem sich bis über den Mittelpunkt einer Basis neigenden Schenkel gleich. Beide gleiche Linien bilden mit der Basis ein gleichschenkliches Dreieck.

Fig. 14.

Je größer der Winkel, desto größer die Entfernung der Endpunkte der Schenkel, welche den Winkel einschließen, und je größer die Entfernung, desto länger die Verbindungslinie.

Umgekehrt: Je kleiner der Winkel eines Dreiecks ist, desto mehr müssen sich die Schenkel, welche denselben einschließen, nähern, je mehr sie sich nähern, desto kürzer ist die Verbindungslinie, oder die dritte dem Winkel gegenüberliegende Seite des Dreiecks.

Daraus geht hervor:

Die Länge der einem Winkel entgegenstehenden Seite eines Dreiecks hängt ab von der Größe des ihr entgegenstehenden Winkels.

a) Die größte Seite steht dem größten, die kleinste Seite dem kleinsten Winkel entgegen (Fig. 14).

b) Gleichen Winkeln eines Dreiecks stehen gleiche Seiten entgegen (Fig. 13).

c) Ungleichen Winkeln stehen auch ungleiche Seiten entgegen (Fig. 15).

a) In

a) In einem rechtwinklichen Dreiecke ist allezeit der rechte, in einem stumpfwinklichen der stumpfe Winkel der größte; folglich ist in einem rechtwinklichen Dreiecke die Hypothenuse allezeit länger, als eine der beiden Katheten, und in einem stumpfwinklichen Dreiecke die dem stumpfen Winkel entgegenstehende Seite ebenfalls allezeit länger, als eine der den stumpfen Winkel einschließenden Seiten.

b) Wenn die Winkel in einem Dreiecke sich verändern, so verändern sich auch die entgegenstehenden Seiten; so lange die Winkel bleiben, so lange bleibt auch die Länge der entgegenstehenden Seiten.

§. 3. Fig. 16.

In einem Cirkel liegt der Mittelpunkt von allen Punkten der Peripherie in gleicher Entfernung; jeder Radius geht von dem Mittelpunkte der Peripherie bis zu einem Peripheriepunkte; folglich sind alle Radien eines Cirkels gleich lang.

Die entgegengesetzten Punkte der Cirkelperipherie sind ebenfalls in gleicher Entfernung. Der Diameter verbindet die entgegengesetzten Punkte der Peripherie, folglich sind alle Diameter eines Cirkels gleich lang.

Fig. 17.

Wenn man von beiden entgegengesetzten Punkten der Peripherie aus den gegenüberliegenden Punkten an dem Halbcirkel nachgeht, so nähern sich dieselben immer in eben dem Maße, als sich der Cirkel selbst rundet; folglich werden die Sehnen eines Cirkels kürzer, je mehr sie sich von den entgegengesetzten Punkten der Peripherie entfernen. Der Cirkel rundet sich um das Centrum herum gleichförmig. Alle gegenüberliegende Punkte der

Peripherie, welche von den entgegengesetzten gleichen Abstand haben, sind daher in gleicher Entfernung, und alle Sehnen, welche gegenüberliegende Punkte der Peripherie verbinden, die in gleicher Entfernung von den Diametern liegen, müssen daher gleich lang seyn. Da der Diameter durch das Centrum geht, so kann man auch sagen, alle Sehnen, die in gleicher Entfernung von dem Centrum liegen, haben gleiche Länge.

Fig. 18.

Wenn man in einem Cirkel irgend einen Punkt außerhalb dem Centrum annimmt, so kann dieser nicht mehr von allen Punkten der Peripherie in gleicher Entfernung seyn, sondern muß sich einem Punkte der Peripherie in gerader Richtung nähern, und von einem in gerader Richtung entfernen. Nun ist von dem Centrum aus die gerade Richtung auf einen Peripheriepunkt der Radius, folglich ist ein außer dem Centrum gelegener Punkt demjenigen Peripheriepunkte am nächsten, in welchen der Radius geht, welcher durch den angenommenen Punkt gezogen wird.

Fig. 19.

Von einem innerhalb der Peripherie gelegenen Punkte geht eine gerade Linie durch das Centrum bis zur Peripherie. Da die Linie durch das Centrum geht, so geht sie auch in gerader Richtung auf den entgegengesetzten Punkt der Peripherie los. Der unter dem Centrum gelegene Punkt A ist daher dem Peripheriepunkte E am nächsten, so wie von diesem Punkte A aus, von welchem die Linie begann, der Peripheriepunkt jenseits des Centrums D am entferntesten ist. Von demselben unter dem Centrum liegenden Punkte entfernen sich alle Peripheriepunkte in demselben Verhältnisse, wie sich der Cirkel rundet. In eben dem Verhältnisse nähert sich aber

auch derselbe Punkt dem entgegengesetzten Punkte in der Peripherie; denn ein jeder wird der Endpunkt, nicht eines Diameters, sondern einer Sehne. Jede Linie, die zu einem dieser Peripheriepunkte gezogen wird, nähert sich um so mehr dem Centrum, je näher sie dem entgegengesetzten Punkte kommt. Nun werden aber die Sehnen um so länger, je näher sie dem Centrum rücken; folglich liegt auch jeder Peripheriepunkt dem gegebenen Punkte immer in größerer Entfernung, je mehr er sich dem Punkte nähert, welcher von dem gegebenen Punkten aus in gerader Richtung durch das Centrum hindurch in der Peripherie liegt.

Fig. 20.

Wenn man außer der Peripherie einen Punkt A annimmt, und von diesem zuerst eine Schneidungslinie durch die Peripherie und das Centrum zu dem entgegengesetzten Punkte B zieht, so erhält diese unter denjenigen Linien, welche bis zu einem andern Peripheriepunkte gezogen werden können, die größte Länge, daher ist auch dieser Punkt der entfernteste. Die Peripherie rundet sich; folglich werden immer die sich von diesem entgegengesetzten Punkte entfernenden Punkte dem gegebenen Punkte A näher kommen, und folglich auch die zu ihnen gezogenen Linien kürzer werden, je mehr sie sich von der zuerst angenommenen Schneidungslinie, die durch das Centrum geht, entfernen. Da eine jede durch das Centrum hinlaufende Linie nun die Peripherie in zwei Halbcirkel theilt, so nähern sich auf beiden Seiten die Punkte der Peripherie in gleichem Maße dem gegebenen Punkte, und die Linien, welche in gleicher Entfernung von dem Centrum liegen, müssen auch in gleicher Entfernung von dem Schneidungspunkte der größten Linie die Peripherie durchschneiden, und daher sowohl innerhalb, als außerhalb der Peripherie gleichen Ab-

stand von dem Mittelpunkte haben. Die innerhalb der Peripherie liegenden Theile sind Sehnen des Cirkels, und diese müssen sich gleich verhalten, wenn sie gleichen Abstand von dem Centrum des Cirkels haben. Die außerhalb der Peripherie gelegenen Theile stehen in gleicher Entfernung von dem in Beziehung auf den gegebenen Punkt höchsten Punkte der Peripherie. Da sich die Peripherie gleichförmig rundet, so müssen auch auf beiden Seiten die von dem höchsten Punkte gleich abstehenden Punkte gleich viel sich vertiefen, und folglich müssen auch die außer der Peripherie gelegenen Theile der Schneidungslinie einander gleich seyn, und folglich auch die ganzen Linien, die gleichen Abstand von der Schneidungslinie haben, die durch das Centrum geht. Der oberste Punkt ist dem gegebenen am nächsten, und daher auch die zwischen ihm und der Peripherie liegende Linie am kürzesten. Der innerhalb der Peripherie gelegene Theil aber am längsten, denn er ist der Diameter. Die von diesem Punkte sich entfernenden Linien treffen auch entferntere Punkte von dem gegebenen Punkt, und sind daher außerhalb der Peripherie auch um so länger, je tiefere Schneidungspunkte sie treffen. Dagegen sind ihre innerhalb der Peripherie gelegenen Theile wiederum um so entferntere Sehnen des Diameters, und als solche um so viel kürzer. Je länger also die außerhalb der Peripherie gelegenen Theile, desto mehr Abstand von dem Centrum haben die innerhalb der Peripherie liegenden Theile, je mehr Abstand, desto kürzer sind sie. Der entfernteste Schneidungspunkt von einem außerhalb der Peripherie gelegenen Theile sind die Schneidungslinien, welche die Peripherie nur berühren, oder wo sie Tangenten sind. Diese beiden Berührungspunkte haben von dem angenommenen Punkte ebenfalls gleichen Abstand, und die Tangenten, welche von einem

gemeinschaftlichen außerhalb der Peripherie gelegenen Punkte ausgehen, verhalten sich folglich gleich.

Fig. 21.

Also alle Tangenten, welche in einem gemeinschaftlichen Punkte außerhalb der Peripherie zusammentreffen, verhalten sich gleich. Denn sie treffen gleich weit entfernte Punkte von dem Diameter, welcher unter dem angenommenen Punkte gezogen werden kann.

§. 4. Fig. 22.

1) Zwei Radien, welche einen rechten Winkel einschließen, fassen den vierten Theil des Cirkels, oder einen Quadranten, in sich. Eine Sehne, welche diese Radien verbindet, ist eine Sehne von 90°. Eine Sehne von 90° kann also nur von zwei Radien eingeschlossen werden, die einen rechten Winkel bilden.

Fig. 23.

Eine Sehne, die zwei Radien verbindet, welche einen Winkel von 60° einschließen, ist eine Sehne von 60°. Diese Sehne bildet mit den beiden Radien ein spitzwinkliges Dreieck, das zwei Radien zu Schenkeln hat. Da alle Radien sich gleich verhalten, so hat dieses Dreieck zwei gleiche Seiten, und ist ein gleichschenkliges Dreieck. In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die beiden Basiswinkel gleich groß, und sind gleich dem Reste, welcher nach Abzug des Scheitelwinkels von zwei rechten Winkeln übrig bleibt. Da nun der Scheitelwinkel, das ist hier der Centriwinkel, 60° beträgt, so müssen die Basiswinkel, das sind hier die Winkel an der Sehne von 60°, 120° betragen, und weil beide gleich sind, so muß jeder $\frac{1}{2} \times 120°$ oder 60° haben; folglich haben alle

drei Winkel 60°, und sind einander gleich. Wenn die Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so müssen auch die Seiten sich gleich neigen, und gleich lang seyn; folglich ist dieß ein gleichseitiges Dreieck. Also bildet die Sehne von 60° mit den beiden Radien ein gleichseitiges Dreieck, und da die Sehne die eine, und die beiden Radien die beiden andern Seiten dieses Dreiecks und alle Seiten gleich sind, so muß auch die Sehne von 60° gleich seyn dem Radius.

Fig. 24.

2) Wenn zwei Radien einen Winkel von 60° einschließen, und von dem Endpunkte des einen Radius ein Perpendikel auf dem andern gefällt wird, so ist dieser Perpendikel der Sinus von 60°. Dieser Sinus ist auch der aus dem Scheitelwinkel auf die Basis gefällte Perpendikel des gleichseitigen Dreiecks, welches aus der Sehne von 60° und den beiden Radien gebildet wird. Der aus dem Scheitelwinkel auf die Basis eines gleichschenklichen oder gleichseitigen Dreiecks gefällte Perpendikel theilt die Basis in zwei gleiche Theile *); folglich theilt auch der Sinus von 60° (weil er dieser Perpendikel ist) den Radius in zwei gleiche Theile, auf welchem er rechtwinklich steht, oder er fällt gerade auf den Mittelpunkt dieses Radius. Und umgekehrt ist der Perpendikel, welcher von dem Mittelpunkt des Radius bis zur Peripherie geht, der Sinus von 60°.

3) Die Entfernung des Sinus vom Sinus totus zeigt der Cosinus an. Da nun der Sinus mit dem Sinus totus, und der Cosinus mit dem Radius, auf welchem der Sinus rechtwinklich steht, parallel läuft, so muß der Cosinus dem zwischen

*) Siehe die Lehre von den Dreiecken im vorigen Cursus.

dem Centrum und dem Sinus liegenden Theile des Radius gleich seyn, auf welchem der Sinus steht; denn dieser Theil und der Cosinus sind Parallellinien zwischen zwei andern Parallelen. Da nun dieser abgeschnittene Theil die Hälfte des Radius, und der Cosinus ihm gleich ist, so ist der Cosinus von 60° gleich einem halben Radius, oder einem halben Sinus totus, und umgekehrt ist der halbe Radius, oder der halbe Sinus totus gleich dem Cosinus von 60°.

4) Der Mittelpunkt des Radius ist von dem senkrecht über ihm liegenden Punkte B der Peripherie eben so weit entfernt, als von dem senkrecht unter ihm liegenden Peripheriepunkte E. Wenn man daher den Sinus von 60° durch den ihm entgegenstehenden Radius bis zur Peripherie verlängert, so entsteht von dem durchschnittenen Punkte des Radius aus bis zum Peripheriepunkte ebenfalls ein Sinus von 60°, und die ganze Linie von einem Punkte der Peripherie bis zum andern bildet eine Sehne von 120°. Daraus erhellt, daß ein Sinus von 60° gleich ist der halben Sehne von 120°, und umgekehrt, die halbe Sehne von 120° gleich ist dem Sinus von 60°; daß ferner eine Sehne von 120° den Mittelpunkt eines Radius rechtwinklich durchschneidet, und daß umgekehrt eine Sehne, welche einen Radius im Mittelpunkte rechtwinklich durchschneidet, eine Sehne von 120° ist.

5) Da der Cosinus von 60° ein Halb des Radius beträgt, der Radius aber der Sehne von 60° gleich ist, so ist auch der Cosinus von 60° gleich einer halben Sehne von 60°.

§. 6. Fig. 25.

1) Jeder Diameter durchschneidet das Centrum des Cirkels, und folglich auch den Mittel-

punkt des Diameters. Sehnen, welche mit einem Diameter parallel laufen, werden von einem zweiten Diameter gleichwinklig (das ist so wie der erste Diameter) durchschnitten, denn es sind Parallellinien, und der Diameter ist die Durchschneidungslinie. Wird also der erste Diameter rechtwinklig durchschnitten, so werden es auch alle die mit ihm parallel laufenden Sehnen. Der zweite Diameter, der den ersten rechtwinklig durchkreuzt, theilt den Halbcirkel in zwei gleiche Theile (Quadranten), und geht also überall gerade durch die Mitte des Halbcirkels, folglich auch durch die Mittelpunkte der Parallelsehnen des Diameters, welcher rechtwinklich durchschnitten wird; folglich muß auch

der Diameter oder Radius, welcher die Sehne rechtwinklich durchschneidet, sie alle gerade in ihren Mittelpunkten durchschneiden, und es wird folglich jede Sehne in zwei gleiche Theile getheilt, sobald man vom Centrum aus einen Perpendikel auf sie fällt.

Fig. 26 und 27.

2) Zwei parallellaufende Sehnen AB und CD haben nicht immer gleiche Länge, sind aber immer von einander gleich weit entfernt; folglich sind die Theile der Peripherie CB und DA, welche von zwei parallellaufenden Sehnen eingeschlossen werden, immer völlig gleich.

Wenn aber die parallel laufenden Sehnen von gleicher Länge sind, so liegen sie in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte, und schneiden auch gleiche Theile der Peripherie ab. Dann sind der oberste Punkt der einen Sehne und der unterste Punkt der andern Sehne entgegengesetzte Punkte der Peripherie, und die Linie, welche diese beiden

Punkte verbindet, ist ein Diameter des Cirkels. Die gegenüberliegenden Punkte der beiden Sehnen haben gleiche Höhe; folglich bilden die Sehnen, welche zwischen zwei andern parallellaufenden Sehnen von gleicher Länge gezogen werden, mit diesen vier rechte Winkel.

§. 7. Fig. 28.

1) Zwei Radien CA und CB, welche einen Winkel von 45° einschließen, schneiden einen halben Quadranten DB ab. Ein Perpendikel DE, der von dem Endpunkte des einen Radius CD auf den andern CB fällt, ist der Sinus von 45°. Da die beiden Radien einen halben Quadranten einschließen, so muß der Sinus totus AC mit dem Radius CD die andere Hälfte des Quadranten abschneiden, und auch einen Winkel von 45° bilden. Der Perpendikel, welcher von dem Endpunkte des obersten Radius auf den Sinus totus fällt, oder der Cosinus DF, muß folglich dem Sinus von 45° DE gleich seyn. Da beide Sinus gleich sind, so müssen sie auch von den Radien, worauf sie ruhen, gleiche Theile abschneiden, und der Quersinus von 45° muß dem durch den Cosinus abgeschnittenen äußern Theile FA des Sinus totus gleich seyn.

2) Wenn man den Sinus von 45° bis zum entgegenstehenden Punkte « der Peripherie verlängert, so entsteht eine Sehne von 90°. Diese ist also der doppelte Sinus von 45°. Vier solcher Sehnen schneiden 4 × 90, das ist 360°, oder die ganze Peripherie ab, und bilden ein Quadrat, welches die Peripherie von innen berührt.

3) Eine Sehne von 90° schneidet von dem Radius, durch welchen sie rechtwinklig geht, einen dem Quersinus gleichen Theil ab. Es bleibt also von dem Radius ein dem Sinus gleicher

Theil übrig. Wenn zwei Sehnen von 90° einen Diameter rechtwinklich durchkreuzen, so schneiden sie an beiden Enden desselben einen Theil ab, welcher dem Quersinus gleich ist, und lassen zwischen sich den größern Theil des Diameters übrig, welcher dem doppelten Sinus oder der Sehne von 90° gleich ist; folglich ist der durch zwei Sehnen von 90° eingeschlossene Theil FH des Diameters gleich einer Sehne von 90°.

Fig. 29.

4) Wenn man auf den Endpunkt des Radius, auf welchem der Sinus von 45° senkrecht steht, eine Tangente fällt, und den andern Radius CD des Winkels von 45° bis zu dieser Tangente verlängert, so entsteht ein rechtwinkliches Dreieck CBA. Die spitzen Winkel eines Dreiecks sind gleich einem rechten Winkel. Nun ist aber der Winkel am Centrum 45 oder ½ eines rechten Winkels, folglich muß der Winkel B an der Tangente auch der Hälfte eines rechten Winkels, und also dem Winkel C am Centrum gleich seyn. Da sich die beiden Winkel an der Secante gleich sind, so ist CAB auch ein gleichschenkliches Dreieck, dessen gleiche Schenkel der Radius und die Tangente von 45° sind; folglich ist

die Tangente von 45° gleich dem Radius oder dem Sinus totus. Die Cotangente B, die zwischen der Tangente und dem Sinus totus liegt, läuft mit dem Radius AC parallel, und ist zwischen den Parallellinien BA und GC.

Also ist auch

die Cotangente von 45° gleich dem Radius des Cirkels.

Die Tangente von 90° ist das Doppelte einer Tangente von 45°, mithin auch dem doppelten

Radius gleich. Der doppelte Radius ist der Diameter.

Also ist

die Tangente von 90° gleich dem Diameter.

Beide Tangenten von 45° bilden mit den Radien, auf welchen sie sich befinden, ein Quadrat GBAC. Die Diagonallinien GA und BC müssen sich daher gleich verhalten. Nun ist aber BC die Secante von 45, und AG die Sehne von 90°.

Es ist also

die Sehne von 90° gleich der Secante von 45°.

§. 8. Fig. 30.

Concentrische Kreise haben ein gemeinschaftliches Centrum. Wenn sie gleiche Radien hätten, so fielen beide Peripherien in eine zusammen, und wenn zwei gleiche Linien in eine zusammenkommen, so hört ihre Verschiedenheit auf, so werden sie eine Linie. Alle Punkte der Peripherie liegen in gleicher Entfernung von dem Centrum. Daraus folgt also, daß die Peripherien der concentrischen Kreise in allen Punkten gleich weit von einander entfernt seyn müssen, und also parallel laufen müssen.

1) Daß zwischen den Peripherien der concentrischen Kreise gleiche Theile der Radien der Diameter liegen.

2) Daß die concentrischen Kreise immer einer in den andern liegen, und einer daher kleiner als der andere seyn müssen.

3) Daß sich die Diameter und Radien und andere gerade Linien der verschiedenen Kreise verhalten müssen wie die Kreisbogen selbst.

§. 9. Fig. 31.

1) Zwei excentrische Kreise, welche sich von innen berühren. Das Centrum des kleinern Krei-

ses liegt von allen Punkten seiner Peripherie in gleicher, und von allen Punkten des andern Kreisbogens in ungleicher Entfernung, der Punkt, wo die beiden Peripherien sich gleich berühren, ist also zugleich der nächste Punkt an dem Centrum des kleinen Kreises. Nun ist die Richtung von dem Centrum des größern Kreises auf das Centrum des kleinen die Centrallinie, und da diese den Unterschied anzeigt, wie viel die Peripherie des inneren Kreises der Peripherie des äußern näher gerückt ist, so geht auch allezeit die Centrallinie in gerader Richtung auf den Berührungspunkt. Dieser ist beiden Peripherien gemeinschaftlich. Die Centrallinie, samt dem Radius, geht von dem Centrum des äußern Kreises bis zum Berührungspunkt, folglich machen beide Linien den Radius des größten Kreises aus.

Der Unterschied zwischen dem Radius des innern und äußern Kreises ist also die Centrallinie.

Folgerung.

Wenn daher die Centrallinie, samt dem Radius des einen excentrischen Kreises, gleich ist dem Radius des andern, so berührt die kleinere Peripherie die größere von Innen.

Fig. 32.

2) Die Peripherie eines berührenden innern excentrischen Kreises trifft gerade in das Centrum des äußern. Da das Centrum des innern Kreises in der Peripherie des äußern liegt, so ist die Centrallinie der Radius dieses innern Kreises. Ziehe ich nun von dem Centrum bis zum Berührungspunkte eine gerade Linie, so erhalte ich den zweiten Radius desselben Kreises. Beide zusammen geben dann den Diameter des innern Kreises, und dieser ist hinwiederum gleich dem Radius des

äußern (denn er geht von dem Centrum bis zur Peripherie).

Daraus folgt:

Wenn die Centrallinie zugleich der Diameter des innern Cirkels ist, so liegt der innere excentrische Kreis so in dem äußern, daß die Peripherie des erstern das Centrum und die Peripherie des letztern berührt.

Fig. 33.

3) Der exsentrische Kreis kann aber auch kleiner seyn, so daß er noch nicht das Centrum des äußersten Kreises berührt, dann geht die Centrallinie durch den nächsten Punkt der Peripherie des innern Kreises, und die Centrallinie mit dem Radius des innern Kreises ist kleiner, als der Radius des äußern Kreises.

Umgekehrt.

Wenn die Centrallinie, samt dem Radius des kleinern berührenden Kreises, kleiner ist, als der Radius des größern, so liegt das Centrum des äußern Kreises noch außerhalb der Peripherie des innern.

4) Wenn aber die kleinere Peripherie die größere nicht berührt, so muß sie, sobald die Kreise excentrisch sind, sich derjenigen Seite der Peripherie nähern, nach welcher zu das Centrum des kleinern Kreises liegt, und folglich die Centrallinie hingeht. Wenn ich in dieser Richtung die Centrallinie bis an die innerhalb des größern Kreises gelegene Peripherie ziehe, so trifft eine Linie den der größern Peripherie zunächst gelegenen Punkt der kleinern Peripherie, und die Centrallinie, samt dem Radius des kleinern Kreises, ist noch nicht so groß, als der Radius des größern; denn es

fehlet noch der Zwischenraum, welcher zwischen dem nächsten Punkte statt findet.

Folgerung.

Wenn daher die Centrallinie, samt dem Radius des kleinern Kreises, noch nicht die Länge des Größern erreicht, so lieget eine Peripherie innerhalb der andern, ohne daß eine Berührung statt findet.

Fig. 34.

5) Die excentrischen Kreise schneiden sich. Es liegt also ein Theil der Peripherie innerhalb, und einer außerhalb der Peripherie des andern Kreises. Da die Cirkellinie allezeit wieder in sich selbst zurückkehrt, so muß sie, wenn sie in einen Kreis hereintritt, auch wieder in sich selbst herauskehren.

Umgekehrt.

Wenn sie beim Herauslaufen schnitt, auch wieder auf einer andern Stelle hereinschneiden, mithin schneiden sich die Cirkellinien allezeit in zwei Punkten.

Fig. 34.

a) Die Peripherien beider Kreise gehen durch ihr gegenseitiges Centrum. Die Centrallinie geht daher auch in beide Peripherien. Von dem Centrum bis zur Peripherie ist der Radius. Die Centrallinie ist mithin der gemeinschaftliche Radius beider Kreise, und da sich Kreise von gleichen Radien gleich verhalten, so würden auch zwei excentrische Kreise, deren Centra in den gegenseitigen Peripherien liegen, völlig gleich seyn.

Ferner müssen auch in jedem Kreise gleiche Bogen des andern liegen. Das Centrum des ersten Kreises A ist der größte Krümmungspunkt des von dem zweiten Kreise B abgeschnittenen Bo-

gens, und da der Bogen von dem größten Krümmungspunkte sich gleichförmig auf beiden Seiten wieder herauskrümmt, so ist auch der größte Krümmungspunkt zugleich der Mittelpunkt dieses Bogens. Eben so verhält es sich mit dem durch das Centrum des zweiten Kreises sich krümmenden Bogen. Wenn wir den von beiden Bogen eingeschlossenen Raum ansehen, so müssen die Schneidungspunkte gerade über der Mitte liegen, und die gerade Linie, welche die Punkte vereinigt, muß dann durch den Mittelpunkt der Centrallinie gehen. Die Centrallinie ist aber hier der Radius, folglich geht die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise durch den Mittelpunkt des Radius, und die Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Radius geht, ist eine Sehne von 120°; folglich ist die gemeinschaftliche Sehne beider excentrischen Kreise, deren Centra in den gegenseitigen Peripherien liegen, eine Sehne von 120°.

Umgekehrt.

Wenn die Centrallinie zweier excentrischen Kreise gleich ist dem Radius beider Kreise, oder wenn die Verbindungslinie der Radius, dann der Schneidungspunkt eine Sehne von 120° ist, so liegen die Centra in den gegenseitigen Peripherien der excentrischen Kreise.

Fig. 35.

b) Zwei gleiche excentrische Kreise sind so gezogen, daß beide Centra innerhalb beider Kreise liegen. Die Centrallinie reicht also an keinem Ende bis zur Peripherie, folglich ist sie noch kürzer als der Radius. Von beiden Seiten müssen aber gleiche Bogen abgeschnitten werden. Diese beiden Endpunkte der Centrallinie müssen daher auch gleichen Abstand von den Peripherien haben; da die Radien beider Kreise einander gleich sind, so müssen auch beide Kreise in gleicher Entfernung von

den Endpunkten, das ist, über dem Mittelpunkte der Centrallinie sich schneiden.

c) Wenn daher die Centrallinie der sich schneidenden gleichen excentrischen Kreise kleiner ist, als der Radius, so liegen beide Peripherien innerhalb beider Kreise.

Fig. 36 und 37.

Endlich kann das Centrum des einen Kreises völlig außerhalb der Peripherie des andern gleichen liegen. Dann liegen beide Centra nur von ihrer einen Peripherie eingeschlossen, und die Centrallinie muß folglich beide Peripherien, die zwischen den Centris liegen, schneiden.

II.

Geometrische Verhältnisse.

§. 10. Fig. 38.

Zwei Linien a und b. Die Linie b ist zwei Mal die Linie a.

Zwei größere Linien A und B. Die Linie B ist länger, als die beiden vorhergehenden Linien, und gerade doppelt so lang, als die folgende vierte Linie A.

So wie also b zwei Mal a ist, so beträgt auch B zwei Mal A, mithin stehen die beiden ersten Paar Linien in ebendemselben Verhältnisse, als die beiden letzten Paare; oder: die erste Linie verhält sich zur zweiten, wie sich die dritte zur vierten verhält:

$$a : b = A : B;$$

folglich stehen die beiden Paare Linien in einem gleichen Verhältnisse.

Wenn

Wenn Linien in einem bestimmten Verhältnisse stehen, so ist die eine um eine bestimmte Anzahl von gleichen Theilen größer, als die andere, mit der sie im Verhältnisse steht.

2) Die erste Linie a enthält aber auch einen unbestimmten Theil von der Länge der dritten Linie, A und die zweite b einen Theil der Länge der vierten Linie B. Nun ist aber die Linie b zwei Mal a, und B zwei Mal A; so viel Theile daher b weniger ist als B, so viel Theile muß auch a weniger seyn als b, denn sonst könnten a mit b und A mit B nicht in gleichem Verhältnisse stehen.

Die dritte Linie ist hier gerade drei Mal so lang als die erste, folglich muß auch die vierte B drei Mal so lang seyn als die zweite b; daher verhält sich auch die erste Linie zur dritten, wie sich die zweite zur vierten verhält: a : A = b : B.

Wenn wir die Zahlen, in welchen die Linien ausgedrückt sind, vergleichen, so verhält sich 2 : 1 = 6 : 3, folglich auch 2 : 6 = 1 : 3; denn 2 ist ein drittel Mal 6, und 1 ist ein drittel Mal 3, und es gilt die allgemeine Regel:

In geometrischen Proportionen stehen die beiden ersten Glieder in demselben Verhältnisse als die beiden zweiten, und das erste Glied verhält sich allezeit zum dritten, wie sich das zweite zum vierten verhält.

Fig. 39.

3) Drei gegebene Linien abc. Die erste ist gleich zwei Drittheilen der zweiten, und diese ist hinwiederum gleich zwei Drittheilen der dritten; oder die erste a verhält sich zur zweiten b, wie diese sich zur dritten c verhält. Die beiden mittlern Glieder dieser Proportionallinien sind also gleich.

Dieselben Proportionen durch Zahlen ausgedrückt:

Die erste Linie sey gleich der Zahl 4, die zweite gleich 6, die dritte ist 9. Es verhält sich dann 4 zu 6, wie 6 zu 9; denn so wie 6 ein und ein halb Mal 4 ist, eben so ist 9 ein und ein halb Mal 6. Also:

$4 : 6 = 6 : 9$, oder $a : b = b : c$.

Die mittlere Proportionallinie oder Proportionalzahl enthält eben so viel Mal die erste, als sie selbst in der dritten enthalten ist.

Fig. 40 und 41.

4) Vier Proportionallinien, deren erste acht solche Theile hat, als die zweite fünf enthält. Die dritte ist 24, folglich muß die vierte auch $\frac{5}{8}$ Mal solche Theile enthalten, als die dritte 24 enthält; $\frac{5}{8}$ Theile von 24 sind aber 15.

Von den vier daneben stehenden Proportionen sind die erste und vierte Linie gleich den Proportionallinien aus der vorhergehenden auf gleicher Stelle, also $g = g$ und $k = k$. Die beiden mittlern stehen aber mit den beiden äußern Gliedern in ungleichen Verhältnissen. Die zweite Linie enthält nämlich $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$ der ersten, und die vierte $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$ der zweiten.

Die mittlern Glieder in der zweiten Proportion stehen mit den gleichen äußern in einem Verhältnisse. Die Linie in der zweiten Proportion, h ist $\frac{5}{8}$ der ersten, folglich $\frac{5}{5}$ Mal der mittlern Linie, i und m, welches mit der gleichen Proportionallinie im Verhältnisse steht, muß natürlich auch $\frac{5}{5}$ der dritten Proportionallinie in der ersten Proportion seyn. Das Verhältniß der Linie ist:

$$\frac{\begin{array}{c} 8 : 5 = 24 : 15 \\ 8 : 6 = 20 : 15 \end{array}}{\frac{5 : 6 = 24 : 20 \text{ oder } 6 : 5 = 20 : 24}{8 : 20 = 6 : 15 \text{ und } 5 : 20 = 6 : 24.}}$$

Durch die gleichen Glieder ist der Größe der Proportion eine Grenze gesetzt. Wenn ein gleichnamiges Glied gewinnt, so muß das andere in eben dem Verhältnisse verlieren. Die zweite Zahl der zweiten Proportion hat ein Fünftel mehr als die gleichnamige der ersten; dafür hat aber die dritte 20 auch einen solchen Theil $\frac{1}{5}$ weniger als 24.

Zwischen den acht Proportionallinien finden also folgende Verhältnisse statt:

$$\frac{\begin{array}{c} g : i = m : k \\ g : m = i : k \\ g : h = l : k \\ g : l = h : k \end{array}}{\frac{i : h = m : l}{i : m = h : l}}$$

Wenn also in zwei geometrischen Proportionen zwei gleiche Größen vorkommen, so heben sich die gleichen Größen in den gleichnamigen Gliedern auf, und die übrigen Glieder bleiben in Proportion:

$$\frac{\begin{array}{c} a : -f- = -g- : b \\ -g- : h = -f- : l \end{array}}{\begin{array}{c} a : h = b : l \\ \text{oder } a : b = h : l \end{array}}$$

§. 11.

Eine gegebene Linie AB, welche durch d und e in drei gleiche Theile getheilt ist. Von einem Punkte C aus gehen zwei gerade einen spitzen Winkel bildende Linien CA und CB an die beiden

Endpunkte der gegebenen Linie. Diese Linien sind hinwiederum durch drei andere mit AB parallellaufende Linien (fg, hi, kl) in vier gleiche Theile getheilt. Von demselben gemeinschaftlichen Punkte C aus gehen noch zwei Linien (cd und ce) in die Theilungspunkte der gegebenen Linie AB. Die drei mit AB parallellaufenden Linien sind durch die beiden Theilungslinien dc und ec, so wie AB selbst, in drei gleiche Theile getheilt. Da jene Parallellinien immer kleiner werden, je mehr sie sich dem Vereinigungspunkte C nähern, so werden auch ihre Theile in eben dem Verhältnisse kleiner. Eben so werden die in den gemeinschaftlichen Punkt laufenden Linien durch die drei Parallellinien in vier gleiche Theile getheilt. Da sich hier zwei und zwei der in C zusammenlaufenden Linien (AC und CB, dC und eC) gleich verhalten, so werden sich auch die gleichen Theile derselben Linien gleich seyn. Hingegen zwei Paar derselben Linien (CB und Ce, CA und Cd) sind einander ungleich, folglich werden auch die gleichen Theile der ungleichen Linien (CB und CE, CA und Cd) ungleich seyn.

So viel als die ganze Linie AB größer ist, als die ganze fg, so viel ist auch ein jedes Drittheil der Linie AB größer, als ein jedes Drittheil der Linie fg. Daher kann ich sagen: so wie sich die Linie AB zur Linie fg verhält, so verhält sich auch der Theil Ad zum Theile fm u. s. f.

Eben so ist die ganze Linie CB größer, als die Linie Ce. Jedes Viertel der ersten Linie wird daher auch um einen verhältnißmäßigen Theil größer seyn, als jedes Viertel der Kleinen. Es verhält sich also z. B. me : gB, wie sich Ce zu gB verhält u. s. f.

Anmerkung. Es ist einem jeden Lehrer überlassen, dasselbe auch auf die übrigen vorkommenden Theile und Verhältnißlinien anzuwenden. Die Menge der

Verhältnisse, die in dieser einzigen Figur liegen, ist groß und mannichfaltig. Die beiden Linien Ab und fg lassen schon folgende Verhältnisse zu:

AB : fg = AD : fm
AB : fg = de : mn
AB : fg = eB : ng
AB : fg = Ae : fn
Ae : AD = fn : fm

dB : mg = AB : fg
dB : mg = de : mn
dB : mg = eB : ng

Dieß alles umgekhrt:
Ad : fm = AB : fg u. s. f.

Diese fünffache und mit der Umkehrung zehnfache Proportion findet hier bei diesen beiden Linien statt. Natürlich erlauben jede zwei andere Proportionallinien auch so viel Verhältnisse. Mit AB können daher die drei parallelen Proportionallinien 30 Proportionen bilden. Denn die Linien AB und hi stellen dieselben Verhältnisse dar, nämlich:

AB : hi = Ad : ho u. s. f.

Eben so stehen auch die in einem Punkte sich vereinigenden Linien mit den Proportionallinien in einem Verhältnisse; so wie sich die ganzen Linien verhalten, so verhalten sich auch die gleichen Theile.

Die Linien, welche sich in einem gemeinschaftlichen Punkte vereinen, neigen sich gerade bis über den Mittelpunkt der gegebenen Linie AB. Da die Linien sich nicht krümmen, sondern gleichförmig neigen, so rücken sie auch in jedem Theile, der dem obersten Punkte C näher liegt, mehr dem Mittelpunkte zu. Nun liegt die Proportionallinie fg dem Vereinigungspunkte C gerade um den vierten Theil näher, denn sie ist im vierten Theile der Linie, folglich wird auch dieser Punkt dem Mittelpunkte der gegebenen Linie AB um den vierten Theil näher gerückt seyn. Die Perpendikel aus dem

Punkte g, so wie aus f, müssen daher gerade auf den Viertelpunkt der halben Linie AB treffen.

Beide Perpendikel schneiden also $\frac{2}{4}$ der halben, das ist $\frac{1}{4}$ der ganzen Linie ab. Da nun die Perpendikel fa und gβ Parallellinien sind, so liegen gleiche Linien zwischen denselben; folglich ist die Linie fg = $\alpha\beta$, das ist $\frac{2}{4}$ AB.

Es ist aber der Theil fA ein Viertel der ganzen Linie CA, und der Theil gB ebenfalls ein Viertel Mal CB; folglich betragen die über fg gelegenen Theile der in C zusammenlaufenden Linien $\frac{3}{4}$ der gegebenen AB, so sieht man daraus, daß alle parallele Proportionallinien eben so viel Theile der gegebenen Linie AB enthalten, als sie von den in C zusammenstoßenden Linien Theile abschneiden. Da sich nun aliquote gleiche Theile so verhalten, wie ihre respectiven Ganzen, so müssen sich auch die parallelen Proportionallinien zu den abgeschnittenen Theilen der in C sich vereinigenden Linien eben so verhalten, als die ganzen Linien; also verhalten sich

1) CA und CB : AB = cf und cg : fg.

2) CA = CB : AB = Ch = cC : hi.

3) CA = CB : AB = Ck = Cl : kl u. s. f.

Eben so stehen auch die Theile unter einander in gleichen Verhältnissen; nämlich:

Cf = cg : fg = Ch = ci : hi

cf = cg ; fg = Ck = Ci ; kl u. s. f.

§. 12. Fig. 43.

1) Wenn in einem Dreiecke ACB eine Linie gezogen wird, welche, wie df, mit irgend einer Seite desselben parallel läuft, so ist diese Proportionallinie kürzer, als die mit ihr parallellaufende Linie, und zwar um eben so viel, als sie selbst Theile

der Seiten abschneidet, zwischen welchen sie liegt. Denn die Seiten müssen sich allezeit um eben so viel zusammengeneigt haben, als die Proportionallinie von der parallelen Seite sich entfernt hat. Daher verhält sich die Proportionallinie zu denjenigen Theilen der Seite eines Dreiecks, welche sie abschneidet, eben so, als sich die der Proportionallinie parallele Seite zu den beiden andern ganzen Seiten verhält, zwischen welchen die Proportionallinie liegt.

Fig. 4 und 5.

2) Da die Proportionallinie df parallel läuft mit einer Seite AB des Dreiecks, so müssen die beiden andern Seiten AC und A und BC an derselben gleiche Winkel machen (der Winkel an d = ∟ an A, der an f = dem an B). Der dritte Winkel C ist aber dem ganzen Dreieck ABC und dem durch die Proportionallinie entstandenen dfC gemeinschaftlich, folglich sind die Winkel beider Dreiecke völlig gleich, und die Seiten stehen in einem gleichen Verhältnisse; beide Dreiecke müssen also auch dieselbe Gestalt haben.

Welche Gestalt auch ein Dreieck haben mag, die Proportionallinie wird allezeit dieselbe mit den abgeschnittenen Seiten wieder darstellen.

3) Drei Proportionallinien AB, AC, CB sind gegeben. Die zweite AC ist $\frac{3}{4}$ der ersten AB, und diese dritte CB ist $\frac{3}{4}$ der zweiten AC. Es verhält sich also:

$$CB : AC = AC : AB.$$

Neben ihnen stehen drei kleinere Proportionallinien zu einander in eben demselben Verhältnisse als die größern; nämlich ca = $\frac{3}{4}$ ba und bc = $\frac{3}{4}$ ca; also ad : ac = ac : bc. Alle diese drei Linien

stehen also ganz in gleichem Verhältnisse. Es fehlt diesen letzten Linien nur die Länge, um den erstern gleich zu seyn, und ein gleiches Verhältniß zwischen ihnen zu begründen.

Fig. 9.

Diese drei Linien sind zu einem Dreiecke verbunden.

Sollen diese Linien ein Dreieck bilden, und doch ihre Länge behalten, so müssen sich die Endpunkte derselben vereinigen, und daher eine solche Neigung erhalten, daß sie sich erreichen. Wäre diese Neigung geringer gewesen, hätte sich z. B. AB weniger zu AC geneigt, so hätte diese Linie nicht das Ende B der Linie CB erreicht, und folglich wäre gar kein Dreieck entstanden; wenn sich die Linien weniger neigen und doch vereinigen sollten, so hätten sich AB und CB verlängern müssen, und mithin hätte zwischen ihnen und der dritten Linie AE das gegebene Verhältniß aufgehört. Wäre die Neigung der Linien größer gewesen, so hätten sie sich unter ihren Endpunkten vereinigt, und die übrigen Theile hätten sich gegenseitig abgeschnitten, folglich wäre auch dadurch das Verhältniß aufgehoben worden.

Da jede andere Neigung eine Veränderung der Länge der gegebenen Seiten erfordert, und eine jede Veränderung der Länge der Seiten, die nicht verhältnißmäßig geschieht, eine andere Neigung fordert, um ein Dreieck einzuschließen, so setzt ein jedes anders angenommene Verhältniß der Länge auch nothwendig eine andere Neigung, mithin andere Winkel, und eine jede Veränderung der Neigung auch eine Veränderung des Längenverhältnisses der Seiten voraus.

Ueberall, wo dasselbe Verhältniß der Länge der Linien statt findet, muß auch dieselbe Neigung

statt finden, wenn sich die Linien vereinigen. Sey nun die Länge der gegebenen Linien welche sie wolle, bleibt das Verhältniß, so haben die daraus entstehenden Dreiecke gleiche Winkel, und mithin gerade dieselbe Gestalt, als die im gegebenen Dreiecke. Da dasselbe Längenverhältniß der Seiten bei dem kleinern Dreiecke, Fig. 10, statt findet, so werden auch dieselben Winkel vorhanden seyn, und die Dreiecke beide zwar ungleiche Größe, aber durchaus gleiche Gestalt haben.

In einem jeden Dreiecke zeigen aber die Winkel die Neigung der Seiten an. Da nun durch diese das gegenseitige Verhältniß der Länge bestimmt wird, so setzt ein jedes angenommene Verhältniß der Winkel eines Dreiecks ein bestimmtes Verhältniß der Seitenlänge nothwendig voraus. Nun hat aber ein jedes Dreieck drei Winkel, die in irgend einem Verhältnisse stehen. Sind alle Winkel einander gleich, so müssen sich alle Seiten gleich neigen, und wenn sie sich gleich neigen, müssen sie auch gleich seyn; also ist ein gleichwinkliches Dreieck auch nothwendig ein gleichseitiges.

Sind zwei Winkel einander gleich, so müssen sich zwei Seiten zu einer dritten gleich neigen, und folglich auch gleich lang seyn.

Die Neigung der Seiten steht also mit ihrer Länge in gleichem Verhältnisse.

Anmerkung. Es können hier zur Uebung mehrere Beispiele gegeben werden, damit sich der Schüler mit den Vorstellungen immer vertrauter mache. Ein reines Auffassen der Gestalten, und die Gewöhnung zu ihrer richtigen Beurtheilung, muß die mathematische Zeichenlehre gewähren. Dazu giebt uns Herbarts A B C die Anschauung. Der Zögling, nach der Grundlage der Herbartschen Anleitung geführt, gewöhnt sich zu einem Auffassen und Beur-

theilen der Gestalten, die nicht nur tausendfach ihm dienen, sondern auch der Welt ein neues eigenthümliches Interesse verleihen, indem dadurch der Beobachtungssinn geweckt, erhalten und immer neu belebt wird. Man beginne hier mit dem rechtwinklichen Dreiecke, suche hier Musterdreiecke zu erwerben, und gehe dann zu andern Gattungen über. An Reichhaltigkeit wird es nie mangeln, denn Combinationen und Nüancen der Gestalten sind unerschöpflich. — — Aber die Uebungen gehören überall nicht der Geometrie, sondern den geometrischen Anschauungen; sie sprechen zu dem Auge, und wollen nach dem Augenscheine beurtheilt seyn. Zum Auffassen führen sie, aber nicht zum Wissen. Die Geometrie will nicht glauben, sondern wissen, nicht beurtheilen, sondern beweisen, nicht das Dargestellte aufnehmen, sondern das nach Denkgesetzen Erzeugte darstellen. Sie darf nicht aus dem Sinnlichen das Nichtsinnliche folgern, sondern die innere Wahrheit nur versinnlichen, nur objectiviren. Beide Uebungen sind wichtig, aber beide können sich einander weder ersetzen, noch ausschließen.

Dagegen werden auch allezeit die Linien, welche ähnlichen Dreiecken entnommen sind, in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Z. B. die Dreiecke Fig. 48 und 50 sind einander ähnlich; die Linien AB, AC, AB, Fig. 49, sind die Seiten des großen Dreiecks, und ba, ac, ab, Fig. 51, sind die Seiten des kleinen Dreiecks. Die Seiten stehen in gleichem Verhältnisse, folglich auch die ihnen gleichen Linien. Es verhält sich demnach die Linie nie BC zu AC, wie sich verhält bc zu ac, und AC zu AB, wie ac zu ab u. s. f.

Folgesätze.

a) Wenn ich von einem gegebenen Dreiecke zwei Winkel weiß, so ist der dritte Winkel allezeit der Rest, welcher nach Abzug der bekannten Winkel von zweien rechten Winkeln entsteht. Wenn daher zwei Dreiecke zwei und zwei gleiche Winkel

haben, so müssen auch die beiden dritten Winkel sich gleich verhalten, und wenn sich die Winkel gleich verhalten, so müssen sich alle drei Seiten gleich neigen, und folglich in gleichem Verhältnisse stehen.

Dreiecke, welche zwei und zwei gleiche Winkel haben, sind einander ähnlich.

b) Wenn ich zwei Paar gerade Verhältnißlinien so vereine, daß sie einen gleichen Winkel einschließen, so haben beide eine bestimmte Neigung und ein bestimmtes Verhältniß der Länge. Sollen beide durch eine dritte Linie verbunden werden, so muß diese Verbindungslinie mit den verschiedenen Schenkeln, welche Winkel einschließen, in einerlei Verhältnisse stehen, und alle Winkel der daraus entstehenden Dreiecke müssen sich gegenseitig gleich verhalten.

Dreiecke, welche einen gleichen Winkel und zwei in gleichem Verhältnisse stehende Seiten haben, sind einander ähnlich.

Fig. 51 und 52.

c) Wenn zwei oder drei Linien, z. B. bc, ac, ab, in gleichem Verhältnisse stehen, so darf die Länge keiner einzelnen verändert werden, sonst hört das Verhältniß auf. Wenn aber eine Linie verändert wird, und das Verhältniß soll bleiben, so müssen auch die andern Verhältnißlinien um einen gleichen Theil ihrer selbst verändert werden; und sind drei Linien vorhanden, die in einem Verhältnisse stehen, so müssen sie, wenn das Verhältniß bleiben soll, wenn eine verändert ist, um aliquote gleiche Theile ihrer selbst ebenfalls verändert (verlängert oder verkürzt) werden *). Fig. 52 wurde

*) Man kann dieses an mehreren Beispielen nachweisen. Man nehme z. B. zwei Linien, die sich verhalten wie 2 : 3, und

die erste Linie um $\frac{1}{2}$ länger gemacht, als bc Fig. 51. Die beiden Linien ca, af sollten mit ihr aber in demselben Verhältnisse bleiben, daher mußte auch jede noch ein Halb länger gemacht werden, als die Linie, an deren Stelle sie treten sollte; also ea = $1\frac{1}{2}$ ac, und af = $1\frac{1}{2}$ ab; daher verhält sich nun ef zu ea und af, wie sich bc zu ac und ab verhält.

Wenn daher in Dreiecken das Verhältniß der Seiten gegeben ist, und ich mache vor allen diesen Dreiecken irgend gleichnamige Seiten *) gleich der andern, so müssen auch alle übrige Seiten gleich gemacht werden, weil sie sonst aus dem Verhältniß der Länge mit einander kommen würden (Fig. 53 aef ist das Dreieck aus den Fig. 52 angegebenen Verhältnißlinien; in dasselbe ist das Dreieck abc aus den Verhältnißlinien Fig. 51 gezeichnet. So wie hier eine Seite af verlängert wurde, so mußten es auch die übrigen werden, und cf, be, se sind die Verlängerungen, welche eine jede Seite empfangen mußte). Nun bestimmen aber zwei Winkel schon das Verhältniß der Seiten eines Dreiecks; ist dazu noch eine Seite gleich, so folgt, daß sowohl die Seiten als auch die Winkel in dem Dreiecke gleich seyn müssen.

Dreiecke, in denen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich sind, sind einander auch in allem Uebrigen völlig gleich (sind congruent, d. i. ähnlich und gleich.

weise nach, wie viel eine jede verlängert werden muß, wenn das gleiche Verhältniß bleiben soll. Wird die erste noch ein Mal so lang, so muß auch die zweite noch ein Mal so lang werden, als sie selbst ist. Dasselbe findet bei drei Linien, die gegeben sind, statt u. s. f.

*) **Gleichnamig** nennt man diejenige Seite, an welcher die gleichen Winkel liegen, die also gleiche Verhältnisse mit den beiden andern haben.

Fig. 54.

$$\begin{array}{c} ab = ih \\ x = x \\ o = o \\ \hline abc = abc \end{array}$$

d) Wenn ich zwei Paar Verhältnißlinien gleich mache und einen Winkel, so ist das Verhältniß der dritten verbindenden Linie auch bestimmt, und da beide Paar einander gleich sind, so muß auch die dritte Verhältnißlinie gleiche Länge haben. Daraus ist also klar:

Dreiecke, welche zwei Paar Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, sind einander ebenfalls gleich und ähnlich (congruent).

§. 13. Fig. 55.

In einem Cirkel ist aus zwei Sehnen AC und CB und dem Diameter AB ein rechtwinkliches Dreieck beschrieben. Aus dem rechten Peripheriewinkel fällt ein Perpendikel CD, und dadurch entstehen zwei rechtwinkliche Dreiecke (BDC und CDA). Beide rechte Winkel liegen an dem Perpendikel. Der Perpendikel ist die halbe Sehne; denke ich mir denselben bis zur Peripherie (Ca) verlängert, so ist er die ganze Sehne.

Der Peripheriewinkel an dem Anfangspunkte der Sehne (∠ a) hat die Hälfte des entgegenstehenden Bogens (CB) zum Maße. Der Peripheriewinkel zur Rechten des Perpendikels (p) hat die Hälfte des ihm entgegenstehenden unterhalb dem Diameter liegenden Bogens (Bx) zu seinem Maße. Beide Bogen sind einander gleich (denn sie sind über dem Mittelpunkte der Sehne getheilt); folglich sind auch die Peripheriewinkel a und p der verschiedenen Dreiecke einander gleich. Da beide

Dreiecke, außer dem rechten Winkel, noch einen spitzen Winkel gleich haben, so sind sie einander ähnlich, und ihre Seiten stehen in gleichem Verhältnisse.

Betrachte ich aus diesen im Verhältnisse stehenden Seiten nur das Verhältniß der Katheten, so sehe ich, daß der Perpendikel CD die gemeinmeinschaftliche Kathete beider Dreiecke ist; nämlich die größte Kathete des Dreiecks DB, und die kleinste Kathete des größeren Dreiecks ABC. Da diese Katheten beider Dreiecke in gleichem Verhältnisse stehen, so verhält sich die kleinste Kathete (DB) des kleinern Dreiecks DCB zur kleinsten Kathete CD des größern DAC, wie sich diese CD zu ihrer größern AD verhält; also

$$DB : DC = DC : DA$$

folglich ist die gemeinschaftliche Kathete der beiden Dreiecke die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden andern Katheten.

Nun ist aber die gemeinschaftliche Kathete CD der Perpendikel aus der Peripherie auf den Diameter; die beiden andern Katheten DB und DA sind die durch ihn abgeschnittenen Theile des Diameters; folglich verhalten sich die durch einen Perpendikel abgeschnittenen Theile des Diameters zu dem Perpendikel, wie sich dieser zu dem andern Theil desselben verhält; oder der Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zu dem durch ihn abgeschnittenen Theile des Diameters (siehe Fig. 56).

Fig. 57.

2) Zwei Sehnen AB und CD durchkreuzen sich einander in einem beliebigen Punkte (E), und bilden Scheitelwinkel. Werden die Endpunkte der Sehnen mit einander verbunden, so entstehen Dreiecke (CEB, ACD, CEA und BED). Die entge-

gengesetzten Dreiecke haben einen gleichen Scheitelwinkel (p = s), und die Peripheriewinkel der entgegengesetzten Dreiecke, die auf einerlei Seite liegen (also ∟ r mit ∟ n, ∟ x mit ∟ o) haben gleiche Bogen zum Maße; folglich haben die entgegenstehenden Dreiecke allezeit drei gleiche Winkel, und sind also einander ähnlich. Es stehen daher auch die Seiten dieser Dreiecke in einem und demselben Verhältnisse.

Es verhält sich also in dem Dreiecke (EB) die Seite CE zu EB, wie sich in dem Dreiecke AED die Seite EA zu ED verhält. Nun sind aber diese Seiten die abgeschnittenen Sehnen des Kreises; folglich stehen allemal die Theile der sich schneidenden Sehnen in gleichem Verhältnisse, oder bilden vier Proportionallinien:

EC : EB = AE : ED.

Zusatz. Hier kann man auch das vertauschte Verhältniß der Proportionallinien sehen. Denn die Dreiecke CEA und BED sind einander ähnlich. Es verhält sich also CE zu EA, wie BE zu ED.

Also CE : EB = EA : DE
CE : EA = EB : DE, s. Fig. 58.

Denn ein jeder Schenkel ist eine gemeinschaftliche Seite zweier Dreiecke, die nach einer vertauschten Ansicht auch in ein umgetauschtes Verhältniß treten müssen.

Fig. 59.

3) Zwei Linien, die von einem außerhalb der Peripherie gelegenem Punkte aus die Peripherie durchschneiden. Werden diese an ihren untersten Enden durch eine Hülfslinie verbunden, so entsteht ein Dreieck aus der Sehne AB und den beiden Schneidungslinien ACB. Verbinde ich die Schneidungspunkte auch durch eine Sehne, so entsteht

innerhalb der Peripherie ein Viereck ABhi. Da die entgegenstehenden Winkel eines Vierecks in einem innerhalb der Peripherie liegenden Vierecke gleich sind zweien rechten Winkeln, und die Sehne den Durchschneidungspunkten mit den Schneidungslinien auch rechte Winkel bilden, so ist der Basiswinkel des Dreiecks aus der Schneidungslinie und einer Sehne allezeit gleich dem entgegenstehenden Basiswinkel der Sehne an den Schneidungspunkten.

$$\frac{\begin{array}{c} x + o = 2R \\ o + q = 2R \end{array}}{x = q} \qquad \frac{\begin{array}{c} r + q = 2R \\ s + q = 2R \end{array}}{r = s}$$

folglich sind die Dreiecke CAB und Chi einander ähnlich, und die entgegenstehenden gleichnamigen Seiten Ch und CB, Ci und CA stehen in gleichem Verhältnisse. Nun sind die Seiten des kleinern Dreiecks Chi die außerhalb der Peripherie liegenden Theile der Schneidungslinie.

Es verhalten sich also die außerhalb der Peripherie liegenden Theile der Schneidungslinien, wie sich die ganzen verhalten. Also:

$$Ch : ci = Ci + iB : Ch + hA.$$

Aus dem Radius und zweien Schneidungslinien ist ein gleichschenkliches Dreieck BDA auf folgende Weise beschrieben. Von der Schneidungslinie BD liegt ein dem Radius gleicher Theil CD außerhalb, und ein dem außerhalb der Peripherie gelegenen Theile des andern Schenkels AD gleiches Stück CB innerhalb der Peripherie. Die andere gleiche Schneidungslinie AD besteht aus dem Radius und einem Stück außerhalb der Peripherie, welches der Sehne CB gleich ist. Aus dem Punkte C ist ein zweiter Radius in das Centrum A gezogen. Da sich die Radien gleich verhalten, so ist das dadurch entstandene Dreieck BAC ein gleich-

schenk-

schenkliges. Der Winkel ABC an der Peripherie ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich. Diesem gleich ist der andere Winkel BCA an der Peripherie, wegen der gleichen Schenkel; beiden gleich muß aber auch der ganze Winkel BAD seyn, aus demselben Grunde. Es haben also die Dreiecke BCA und BDA zwei gleiche Winkel, und sind daher einander ähnlich. Die Sehne BC, als Basis von BCA, verhält sich demnach zu ihrem gleichen Schenkel, dem Radius BA, wie sich dieser als Basis des gleichschenkligen Dreiecks BAD zur Schneidungslinie BD, als einem der gleichen Schenkel, verhält. Da das Stück CD, außerhalb der Peripherie, dem Radius DA gleich ist, so kann man auch anstatt desselben das Stück CD in das Verhältniß setzen, dann sind alle Glieder der Proportion in einer und derselben Linie. Es verhält sich nämlich dann die Sehne BC zu dem äußern Stück CD, wie dieses sich zu der ganzen Linie BD verhält. Das äußere Stück CD ist also die mittlere Proportionallinie zu dem kleinern Theile BC und der ganzen Linie BD.

In der ganzen Figur ist noch ein gleichschenkliges Dreieck ACD enthalten. Denn CA ist der Radius, und CD ist nach der Voraussetzung ihm gleich. Es ist daher der Winkel CAD gleich dem Winkel ADC. Da der Letztere auch gleich seyn muß dem Winkel BAC (wegen Aehnlichkeit der Dreiecke), so sind die drei genannten spitzen Winkel einander gleich. Mithin ist BAC gleich der Hälfte des Winkels BAD. Dasselbe muß auch der Winkel BDA seyn. Es sind daher die Dreiecke BDA und BAC Dreiecke, deren Scheitelwinkel gleich sind der Hälfte eines jeden der Basiswinkel.

Der stumpfe Winkel ACD als Scheitelwinkel des Dreiecks DCA muß aber gleich seyn einem Basiswinkel samt dem Scheitelwinkel des gleich-

schenkligen Dreiecks BCA, denn er ist der äußere Winkel. Da nun ein Basiswinkel gleich ist zweien Scheitelwinkeln, und der stumpfe Winkel einem Basiswinkel samt einem Scheitelwinkel, so muß er das Dreifache eines Scheitelwinkels enthalten. Mithin ist der stumpfe Winkel ACD drei Mal so groß, als einer der gleichen Winkel CAD und ADC.

Es bilden also die Radien samt der Schneidungslinie AD ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitelwinkel das Dreifache einer seiner Basiswinkel enthält.

Untersuche ich, wie viel Grad ein jeder Winkel enthalten muß, so finde ich dieß durch folgende Betrachtungen.

Der Scheitelwinkel BDA ist gleich der Hälfte eines Basiswinkels. Beide Basiswinkel müssen also vier Mal den Scheitelwinkel enthalten. Denke ich mir jeden Basiswinkel wirklich in zwei gleiche Theile zerlegt, so erhalte ich mit dem Scheitelwinkel BDA zusammengenommen fünf gleich große Winkel aus den drei Winkeln des Dreiecks. Jeder Winkel muß mithin den fünften Theil der Summe aller Winkel eines Dreiecks enthalten, das ist den fünften Theil von zwei rechten Winkeln, oder von 180°, das sind 36°. Mithin ist der Scheitelwinkel BDA 36°, und jeder Basiswinkel 72°. Es ist daher auch die Sehne BC eine Sehne von 36°. Daher findet auch folgendes feste Verhältniß statt:

Es verhält sich allezeit die Sehne von 36° zu dem Radius, wie dieser zu einer Linie, die dem Radius und der Sehne von 36° gleich ist.

Ferner:

Ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der Radius, und dessen Schenkel dem Radius samt der Sehne von 36°

gleich sind, ist ein Dreieck, dessen Scheitelwinkel den halben Basiswinkel enthält.

Endlich:

Wenn man einen der gleichen Schenkel eines Dreiecks, dessen Scheitelwinkel der Hälfte eines Basiswinkels gleicht, mit der Basis eintheilt, so ist der der Basis gleiche Theil die mittlere Proportionallinie zu dem kleinern Theile und dem ganzen Schenkel.

Uebersicht:

Da $\angle\ BCA = ABD = BDA$

so ist $\angle\ BAC = BDA$

$\triangle$ BAC und BAD

$$BC : BA = BA : BD$$

$$BA = CD$$

$$BC : CD = CD : BD$$

$$\angle\ CAD = CDA$$

$$\angle\ BDA = BAC$$

$$\angle\ CAD = BAC$$

$$\angle\ BAC = \tfrac{1}{2}\ CAD + BAC$$

$$\angle\ CAD + BAC = BAD$$

$$\angle\ BDA = BAC$$

$$\angle\ BDA = \tfrac{1}{2}\ BAD.$$

Fig. 60.

4) Wenn eine Secante durch den Berührungspunkt des Sinus gezogen wird, so entstehen dadurch zwei Dreiecke ABC und Agk. Beide Dreiecke sind rechtwinklich, und haben den Winkel an dem Centrum gemeinschaftlich, folglich sind sie ein-

ander ähnlich. Die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke sind aber der halbe Radius Ak, auf welchem der Sinus von 60° allezeit steht, mit dem ganzen Radius AB Der Sinus gk mit der Tangente CB, der Radius Ag mit der Secante AC. Nun ist aber die kleinste Kathete des größern Dreiecks ABC das Doppelte ihrer gleichnamigen Seite, folglich müssen auch alle übrigen Seiten die doppelte Länge haben. Daraus geht hervor:

Die Tangente von 60° ist gleich dem doppelten Sinus von 60°, das ist der Sehne von 120°, und die Secante dem doppelten Radius Ag, das ist dem Diameter.

§. 14. Fig. 61.

1) Man denke sich durch die Spitze eines Kegels ein Dreieck beschrieben, welches dem gegebenen ABC gleich sey. Dieser Kegel sey nach der Proportionallinie ED geschnitten, so ist dieser Abschnitt eine Parabel, und die Proportionallinie ED stellt die Axe dieser Parabelfläche dar, so sind die Linien ik, gh, fc Diameter der Scheiben, welche von unten auf bis zur Spitze dicht an einander gedacht werden können. Da der Parabelschnitt von der Seite geschehen ist, so ist die Ordinate (die von der Axe bis zur Seite derselben geht) immer eine halbe Sehne oder ein Sinus derjenigen Scheibe, in welcher die Ordinate gerade liegt. (Diese Ordinaten sind hier cx, ps, qr. Man hat sie sich horizontal hinwärts laufend zu denken, so wie ihre Halbcirkel, die am Kegel über einander liegen.)

Da die Axe der Parabelfläche mit der entgegenstehenden Seite des Kegels parallel läuft, so sind die zwischenliegenden Theile der Diameter der Scheiben io, gp, fq einander gleich (als Parallellelinien zwischen Parallelen), hingegen die innerhalb des parabolischen Abschnitts liegenden Theile

der Diameter sind einander ungleich (als Proportionalen eines Dreiecks).

Nehme ich einen zwischen diesen Parallellinien gelegenen Theil des Diameters und ziehe ihn von der Spitze des Dreiecks GAH ab, und ziehe dann eine gerade Linie GH bis zu dem entgegengesetzten Schenkel mit BC parallel, so ist diese Linie der Parameter der Parabel.

Da die Linien zwischen dem Diameter und der Parallelseite feste (das sind nicht willkührlich zu verändernde, sondern bestimmt sich selbst gleiche) Linien sind, so muß auch der Parameter eine feste Linie seyn.

Der Parameter, so wie die Axe EL, können auch als Proportionallinien des Dreiecks um den Kegel angesehen werden. Da diese mit den abgeschnittenen Seiten des Dreiecks allezeit ähnliche Dreiecke bilden, so verhält sich AG zu GH, wie sich verhält Ec zu cK. Da nun ic = AG, so verhält sich auch ic zu GH wie sich Ec zu ik verhält, oder das Segment des Diameters zwischen der Axe ED und der entgegenstehenden Seite des Kegels GB verhält sich zu dem Parameter, wie sich die Abscisse cE zu dem innerhalb der Parabel liegenden Theile des Diameters; folglich verhält sich auch das außer der Parabel liegende Segment (ic) des Diameters (ik) zur Abscisse (Ec), wie der Parameter zu dem innerhalb der Parabel liegenden Segment (ck).

Die halbe Ordinate cx ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Segmenten des Diameters, und daher auch die mittlere Proportionallinie zwischen denjenigen Linien, welche in einem eben solchen Verhältnisse stehen, als die beiden Segmente, das sind der Parameter und der Abscisse; folglich verhält sich der Parameter

zur halben Ordinate, wie sich diese zur Abscisse verhält, oder die halbe Ordinate ist allezeit die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Abscisse.

$$AG : GH = Ec : cK \ (Ep : ph \text{ etc.})$$
$$AG = ic \ (gp, fq \text{ etc.})$$
$$ic \ (gp \text{ etc.}) : GH = Ec \ (Ep \text{ etc.}) : ck \ (ph).$$

Daher auch $ic : Ec = GH : ck$

ferner $cp : cx = cx : ci$ *)

$$Ec : cx = cx : GH$$

Derjenige Punkt in der Axe, dessen zugehörige Ordinate gleich ist dem Parameter, ist der Brennpunkt. So wie also der Parameter eine feste Linie ist, so ist es auch die Abscisse am Brennpunkte.

Fig. 62.

Anm. Dieselbe Parabel ist hier mit der vordern Fläche gezeichnet.

2) Die halbe Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zu dem Parameter und der Abscisse. Die halbe Ordinate am Brennpunkte ist gleich dem halben Parameter, folglich muß auch die Abscisse gleich seyn der Hälfte der halben, das ist einem Viertel der ganzen Ordinate, und da diese gleich ist einem Viertel des Parameters, ebenfalls dem vierten Theile desselben.

$$Ec : cx = cx : GH$$
$$cx = \tfrac{1}{2} GH$$

$$Ec = \tfrac{1}{2} cx, \ \tfrac{1}{2} cx = \tfrac{1}{4} GH.$$

*) Man vergleiche II. §. 9. Satz 4.

Man findet daher auch den Brennpunkt, wenn man ein Viertel des Parameters von dem Scheitelpunkte der Parabel aus sucht *).

Fig. 63.

3) Wenn man daher dieser Absciſſe die doppelte Länge über den Scheitelpunkt herausgiebt, und dann durch ihren oberſten Punkt eine gerade Linie legt, ſo iſt dieſe die Directrix. Von dieſer aus ziehe ich eine mit der verlängerten Axe AM parallel laufende Linie LE. Von demſelben Punkte L der Axe ziehe ich auch eine gerade Linie LC bis in den Brennpunkt C. Den Brennpunkt verbinde ich mit dem Berührungspunkte E durch einen Radius Vector. Mit der Linie LC aus der Directrix lege ich noch eine parallel laufende Linie EM, ſo entſteht die Rhomboide LEMC. Der äußere Winkel E derſelben iſt gleich dem gegenüberliegenden innern L, und auch zugleich dem entgegenſtehenden innern C, mit dem er Wechſelswinkel bildet; folglich müſſen auch die Winkel C und L einander gleich ſeyn. Da die Winkel gleich ſind, ſo müſſen es auch die ſie bildenden Seiten ſeyn; folglich iſt der Perpendikel LE gleich dem Radius Vector. Nun iſt aber derſelbe Perpendikel auch gleich dem Stück der verlängerten Axe KA, welche zwiſchen der Ordinate deſſelben Punktes E und der Directrix liegt; folglich iſt auch der Radius Vector gleich der verlängerten Absciſſe zwiſchen der jenem zukommenden Ordinate und der Directrix.

$$\urcorner E = \llcorner ELC$$
$$\urcorner E = \llcorner ECL$$

$$\llcorner ELC = \llcorner ECL$$

$$EC = EL$$
$$EL = KA$$

$$EC = KA$$

*) Eine von dem Brennpunkte aus bis zum Endpunkte der Ordinate gezogene ſchräge Linie, wie cx, heißt ein Radius Vector.

4) Wenn ich durch die Scheitel eines gleichschenkligen Dreiecks, z. B. ELC, aus dem Radius Vector und dem ihr gleichen Perpendikel LE eine gerade, den Winkel in zwei gleiche theilende Linien lege, so geht die Linie durch einen Punkt der Parabel, ohne die parabolische Linie zu durchschneiden, und ist folglich eine Tangente.

Da sie den Scheitelwinkel in zwei gleiche Theile theilt, so muß sie auch die Basis desselben, das ist, die aus der Directrix in den Brennpunkt gezogene Linie LC, in zwei gleiche Theile theilen, und also rechtwinklig durchschneiden.

Fälle ich einen Perpendikel EM aus dem Berührungspunkte der Tangente, so muß dieser der aus der Directrix in den Brennpunkt laufenden Linie LC parallel seyn. Die Ordinate EK ist gleich dem Theile der Directrix LA; denn es sind Parallellinien zwischen Parallellinien; aus gleichem Grunde sind die Linien LC und EM gleich, beide genannte Linien schließen aus demselben Grunde gleiche Winkel ein; folglich sind die Dreiecke EKM und DAC congruent; daher ist die Kathete AC des letztern Dreiecks gleich der gleichnamigen Kathete KM des Dreiecks EKM, oder der Subnormallinie. AC besteht aber aus der Abscisse am Brennpunkte und dem bis an die Directrix verlängerten Stücke. Diese Linie ist gleich der doppelten Abscisse am Brennpunkte oder dem halben Parameter; folglich ist die Subnormallinie gleich dem halben Parameter, und mithin eine beständige Linie.

Fig. 64.

5) Von dem Scheitelpunkte B der Parabel ist eine Linie BI durch die Tangente bis in H gelegt, und ein Perpendikel HE auf die Ordinate EK gefällt; dadurch entstehen die rechtwinkligen Dreiecke

IBG und IHE. Der Winkel EIH ist gleich dem Winkel BIG, denn es sind Scheitelwinkel. Die rechten Winkel verhalten sich gleich, folglich sind die Dreiecke einander ähnlich. Die gleichnamigen Seiten sind IH und IB, der Perpendikel HE und die Subtangente GB, und endlich die abgeschnittenen Theile der Tangente EG.

Ziehe ich nun aus B eine mit der Tangente parallel laufende Linie BZ, so muß auch diese ein jenen beiden ähnliches Dreieck bilden.

Nun ist ZG gleich IM, folglich haben die ähnlichen Dreiecke IBG und ZKB eine gleiche Seite, daher sie sich gleich verhalten.

Die Subtangente GB und die Abscisse KB zu der Ordinate an dem Berührungspunkte der Tangente sind die gleichnamigen Seiten dieser Dreiecke; folglich ist die Subtangente einer Parabel doppelt so groß, als die Abscisse, welche die dem Berührungspunkte zugehörige Ordinate abschneidet.

Das Dreieck EBG besteht aus dem Trapezion AIBG und aus dem rechtwinkligen Dreiecke IMG. Das Parallelogramm IMAG aus der Ordinate und Abscisse ist aus demselben Trapezion und aus dem rechtwinkligen Dreiecke IBE zusammengesetzt. Nun sind aber die Dreiecke IBG und IAE einander gleich (denn es ist wegen der gleichen Seiten EH und BK dem Dreiecke BZK gleich), das Trapezion ist sich selbst gleich, man mag es als Theil des Parallelogramms oder des Dreiecks EKG betrachten; folglich ist das Dreieck aus der Tangente, Subtangente und der dazu gehörigen Ordinate gleich dem Rechtecke aus der Abscisse und derselben Ordinate.

$$HEKB = EIBK + HEI$$
$$EKG = EIBK + IBG$$
$$HEI = IBG$$

$$EIK + IBG = EIBK + IEV$$

$$HEKB = EKG.$$

Anhang

zu den beiden vorhergehenden Abtheilungen.

Geometrische Formenconstruction

als Folgesätze vorhereingesehener Lehrsätze.

Hauptproblem I.

Fig. 1.

Eine Linie der andern gleich zu machen.

Ich weiß es, daß die Radien eines Cirkels sich immer gleich sind.

Wenn ich also die gegebene Linie AB als Radius betrachte, so brauche ich nur damit einen Cirkel zu beschreiben, und noch einen zweiten Radius daran zu setzen, so ist der Forderung Genüge geleistet.

Verkürzt:

Ich fasse beide Linien in eine gleiche Cirkelöffnung.

Abgeleitete Aufgaben.

Fig. 2.

1) Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben.

Zu einem gleichschenkligen Dreiecke brauche ich:

a) zwei gleiche Linien,

b) eine solche Lage, daß sie sich vereinen.

Gleiche Linien, die sich vereinen, geben mir die Radien eines Cirkels.

Sollen zwei Radien ein Dreieck bilden, so müssen sie mit einer Sehne verbunden werden. Die Länge derselben giebt die Lage an, welche die Radien haben müssen.

A) die Basis dieses gleichschenkligen Dreiecks soll länger seyn, als einer der beiden Schenkel.

Die Länge der Radien muß bleiben, ich kann also nur die Länge der Sehnen ändern.

Mache ich diese länger, als die Radien, so wird auch die Basis des Dreiecks länger.

Umgekehrt.

B) die Basis ist gegeben; ich soll die gleichen Schenkel willkührlich darauf ziehen.

Ich ziehe eine Cirkelperipherie, in diese trage ich die gegebene Basis, und ziehe an die Endpunkte desselben Radien.

C) Eine Seite ist gegeben; ich soll die Basis samt der andern Seite dazu suchen.

Ich betrachte die gegebene Seite als Radius, mit dem ich den Cirkel beschreibe, ziehe nach Belieben eine Sehne von dem Endpunkte des Radius,

und lege an das andere Ende der Sehne auch einen Radius.

D) Es ist eine Seite samt der Basis gegeben, ich will die dritte suchen.

Ich betrachte die Seite als Radius, die Basis als Sehne, und verfahre wie vorher.

III. Fig. 25.

2) Eine Sehne in zwei gleiche Theile zu theilen.

Der Centriwinkel ist allezeit der Scheitelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks. Da nun in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so müssen sie sich auch gerade über dem Mittelpunkte vereinen, und der Perpendikel von dem Centrum auf die Sehne theilt die Basis in zwei gleiche Theile. Da nun jede Sehne als Basis eines solchen Dreiecks angesehen werden kann, so theilt ein jeder Perpendikel, der von dem Centrum auf die Sehne fällt, dieselbe in zwei gleiche Theile.

Fig. 3.

3) Den Mittelpunkt einer jeden gegebenen Linie zu finden.

Wenn ich die gegebene Linie als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks betrachte, den Vereinigungspunkt der beiden Schenkel, das ist, den Scheitelwinkel, dadurch aufsuche, daß ich von beiden Enden der gegebenen Linie mit gleicher Cirkelöffnung zwei kleine Bogen ohngefähr über dem Mittelpunkte der Linie bemerke, und von dem Punkte, wo diese Bogen sich durchschneiden, einen Perpendikel fälle, so trifft dieser auf den Mittelpunkt der gegebenen Linie. Denn einen jeden Scheitelwinkel des Dreiecks kann ich ja ansehen als einen Centriwinkel, und eine jede ihm entge-

genstehende Seite als Sehne. Nun theilt aber ein Perpendikel aus dem Centrum eine Sehne allezeit in zwei gleiche Theile, und trifft folglich den Mittelpunkt.

4) Zu einem gegebenen Cirkel den Diameter zu finden.

a) Der Diameter muß gerade durch das Centrum gehen.

b) Eine Linie, welche perpendikulär durch den Mittelpunkt einer Sehne geht, muß allezeit aus dem Centrum kommen.

Wenn ich also umgekehrt einen Perpendikel durch den Mittelpunkt der Sehne in den Kreis ziehe, so geht dieser gerade durch das Centrum; verlängere ich denselben an beiden Enden bis zur Peripherie, so ist der Diameter gefunden.

Fig. 4.

5) Das Centrum eines Kreises zu finden.

a) Das Centrum liegt gerade in dem Mittelpunkte des Diameters.

Ich suche also zuvörderst den Diameter.

b) Den Mittelpunkt des Diameters suche ich wie (3) bei einer jeden andern Linie, indem ich ihn als Basis eines gleichschenklichen Dreiecks betrachte.

II. Fig. 4.

6) In einem gegebenen Cirkel ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben.

a) Alle drei Winkel müssen die Peripherie berühren.

b) Die Hypothenuse ist die längste Linie. Die längste Linie in einer Peripherie ist der Diameter. An der Hypothenuse liegen die bei-

den spitzen Winkel, folglich werden auch hier die spitzen Winkel an dem Diameter liegen, und der dem Diameter entgegenstehende Peripheriewinkel ist der rechte Winkel, denn er steht mit seinen beiden Schenkeln auf dem Diameter.

A) Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, zu dem die Hypothenuse gegeben.

Ich betrachte die Hypothenuse als Diameter des Cirkels, und suche den Mittelpunkt; dieser ist das Centrum des Cirkels, den ich nun von dem Mittelpunkte aus beschreibe. Verbinde ich die Endpunkte dieses Diameters durch zwei sich an der Peripherie vereinigende Sehnen, so ist die Aufgabe gelöset.

B) Ein rechtwinkliges Dreieck in einen Cirkel zu beschreiben, wozu eine Kathete gegeben ist.

Die Kathete eines rechtwinkligen in einem Cirkel beschriebenen Dreiecks ist allezeit eine Sehne. Man nehme einen Diameter, der länger als die gegebene Kathete ist, und trage diese dann in den gezogenen Kreis.

7) Es soll auf dem Endpunkte einer gegebenen Linie AB ein Perpendikel gefällt werden.

a) Der Perpendikel bildet mit der gegebenen Linie einen rechten Winkel. Einen rechten Winkel kann ich in einem Cirkel finden, wenn ich von den beiden Endpunkten eines Diameters zwei Sehnen ziehe, die sich an der Peripherie zu einem Winkel vereinen. Wenn ich also um die gegebene Linie einen Cirkel so herumlege, daß die Linie eine Sehne des Cirkels

wird, und von dem einen Endpunkte dieser Sehne einen Diameter ziehe, der durch eine zweite Sehne mit der ersten verbunden wird, so ist diese zweite Sehne der gesuchte Perpendikel.

II. Fig. 4.

8) Es soll an irgend einem Peripheriepunkte eine Tangente gelegt werden.

Da die Tangente allemal mit einem Radius einen rechten Winkel bildet, so darf ich nur zuvor von dem bestimmten Peripheriepunkte aus einen Radius in die Peripherie legen, darauf einen Perpendikel fällen, und an der andern Seite verlängern, so ist dieser die verlangte Tangente.

Fig. 5.

9) Eine Tangente zu beschreiben, die durch irgend einen außerhalb der Peripherie gelegenen Punkt gehen soll.

Ich weiß den Punkt D, in welchen die Tangente gehen soll, aber ich weiß nicht, welche Lage ich der Linie geben soll, um eine Tangente zu bilden.

Um diese zu finden, ziehe ich aus dem Centrum C des gegebenen Kreises in den gegebenen Punkt D eine gerade Linie CD. Ich suche den Mittelpunkt E dieser Linie, und beschreibe von diesem aus einen Cirkel, der sowohl das Centrum C, als auch den Punkt D berühren muß. Bis zum Schneidungspunkte B lege ich den Radius CB des gegebenen Cirkels. Ziehe ich nun von D in den Punkt B eine gerade Linie DB, so bildet diese mit dem Radius CB einen rechten Winkel, und berührt die gegebene Peripherie nur in einem Punkte; folglich muß die Linie BD die gegebene Tangente seyn.

III. Fig. 28.

10) Ein Quadrat in einen Cirkel zu beschreiben.

Ich suche vier gleiche Sehnen, welche die ganze Peripherie abschneiden, und durch deren Verbindung ein Quadrat entsteht. Dieß sind aber Sehnen von 90°. Eine Sehne von 90 Grad ist aber diejenige, welche von zwei Radien eingeschlossen wird, die einen rechten Winkel bilden. Vier Radien, welche einen rechten Winkel einschließen, entstehen aber, wenn sich zwei Diameter rechtwinklig durchkreuzen. Werden diese durch Sehnen verbunden, so ist das Quadrat beschrieben.

III. Fig. 27.

Zusatz. Ein Rechteck wird in einem Cirkel beschrieben, wenn zwei gleiche parallel laufende Sehnen durch zwei andere verbunden werden.

III. Fig. 28.

11) Einen Sinus von 45° zu finden.

Ich weiß, daß der Sinus von 45° derjenige Perpendikel ist, welcher von dem Schneidungspunkte D einer Secante, die am Centrum einen Winkel von 45° bildet, auf den Radius CB gefällt wird. Ich suche also diese Secante. Um die Secante zu finden, brauche ich nur den Mittelpunkt des Quadranten BA zu suchen, und um den Mittelpunkt zu finden, darf ich durch die Sehne von 90° eine Perpendikulärlinie vom Centrum aus legen, die allemal sowohl die Sehne, als auch den durch dieselbe abgeschnittenen Theil des Bogens in zwei gleiche Theile theilt. Diese Linie CD durch die Peripherie gezogen ist die gesuchte Secante, und der Perpendikel DG der verlangte Sinus, so wie FD sein Cosinus.

12) Ei-

Fig. 3.

12) Einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Wenn der Winkel innerhalb einer Peripherie am Centrum läge, so würde eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt desjenigen Theils des Bogens geht, der von den Schenkeln des gegebenen Winkels eingeschlossen wird, den Winkel in zwei gleiche Theile theilen. Um aber diesen Mittelpunkt zu finden, verbinde ich die Endpunkte dieses Bogens durch eine Sehne, und fälle dann einen Perpendikel durch den Mittelpunkt der Sehne in den Winkel, so wäre der Centriwinkel in zwei gleiche Theile getheilt. Ich kann aber jeden gegebenen Winkel als Centriwinkel betrachten, indem ich von dem Winkel aus einen Bogen zwischen den Schenkeln desselben beschreibe. Verbinde ich die Endpunkte des Bogens durch eine Sehne, und fälle eine Perpendikularlinie durch den Mittelpunkt derselben, so wird die Aufgabe gelöset seyn.

Nebenproblem B.

III. Fig. 23.

Es soll ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden.

Zu einem gleichseitigen Dreiecke brauche ich:

a) drei gleiche Linien,

b) eine solche Lage, daß sie sich vereinen.

Aufl. Zwei gleiche Seiten gewähren die Radien des Cirkels, deren Vereinigungspunkt das Centrum ist.

Die dritte Seite des Dreiecks muß eine Sehne seyn, welche den Radien gleich ist, das ist aber die Sehne von 60° (Fig. 2 bc). Ich schneide also mit derselben Cirkelöffnung, die einen Radius faßt,

einen Theil der Peripherie ab, ziehe zwischen dem abgeschnittenen Bogen eine Sehne, und verbinde diese durch zwei Radien zu einem Dreiecke.

Zusatz. Wenn zu dem gleichseitigen Dreiecke eine Seite gegeben ist, so fasse ich diese Seite in den Cirkel, betrachte sie als Radius, und verfahre wie vorher.

III. Fig. 23.

1) Es soll ein Winkel von 60° gezeichnet werden.

Ich weiß, daß jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° hat. Ich bringe also zwei Radien im Centrum zusammen, und lege ihre Endpunkte in eine Entfernung von 60°, das ist, von dem einen Radius aus mit derselben Cirkelöffnung die Peripherie geschnitten.

III. Fig. 24.

2) Ich will einen Perpendikel durch den Mittelpunkt des Radius ac legen.

Ich weiß, daß ein Winkel eines gleichseitigen Dreiecks allezeit perpendikular über dem Mittelpunkte der entgegenstehenden Seite liegen muß. Da nun zwei Radien, die eine Sehne von 60° einschließen, ein gleichseitiges Dreieck bilden, und der Perpendikel aus diesem Peripheriepunkte auf den entgegenstehenden Radius der Sinus von 60° ist, so muß auch der Sinus von 60° den entgegenstehenden Radius in der Hälfte treffen.

Umgekehrt.

3) Auf einen gegebenen Radius ac einen Sinus von 60° zu fällen.

Ich schneide mit der Oeffnung eines Radius einen Theil der Peripherie, so erhalte ich den Endpunkt der Sehne von 60°. Dieser ist der Schei-

telpunkt des gleichseitigen Dreiecks aus den Radien und der Sehne. Ein Perpendikel aus dem Scheitelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks fällt aber gerade auf den Mittelpunkt der Basis, das ist hier auf den Mittelpunkt des Radius ac. Nun ist aber der Perpendikel, welcher aus der Peripherie gerade auf den Mittelpunkt des Radius fällt, der Sinus von 60°.

III. Fig. 24.

4) Es soll eine Sehne von 120° gefunden werden.

Ich weiß, daß eine Sehne von 120° der doppelte Sinus von 60° ist.

Wenn ich also mit der Cirkelöffnung, die der Radius erfordert, über und unter dem Radius ac die Sehnen von 60° in b und d schneide, und diese geschnittenen Punkte durch eine gerade Linie verbinde, so ist dieses die Sehne von 120°.

Fig. 6.

5) Es soll ein gleichseitiges Dreieck in einen Cirkel beschrieben werden.

a) Die Ecken des Dreiecks müssen die Peripherie berühren;

b) alle drei Sehnen müssen daher auch die ganze Peripherie abschneiden.

Drei Sehnen, welche einander gleich sind und die ganze Peripherie abschneiden, sind drei Sehnen von 120°. Beschreibe ich diese so in einen Cirkel, daß sie sich an ihren Endpunkten vereinen, so bilden sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen drei Ecken die Peripherie von innen berühren.

6) Es soll um den Cirkel ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden.

Die gleichen Seiten sollen die Cirkel in drei Punkten berühren; die Berührungspunkte müssen

also die Mitte einer jeden Seite treffen, und da diese gleich sind, so müssen auch die Berührungspunkte des Cirkels in gleicher Entfernung liegen. Dieß können aber keine andern seyn, als die Punkte, welche 120° von einander entfernt liegen. Ich lege also an diese Punkte Tangenten, und verlängere sie so lange, bis sie einander berühren. So bilden diese gleichen Tangenten von 120° ein gleichseitiges Dreieck, welches um den Cirkel beschrieben ist (Fig. 3).

Fig. 7.

7) Es soll ein regelmäßiges Hexagon in einen Cirkel beschrieben werden.

a) Das Hexagon muß mit allen sechs Ecken die Peripherie berühren;

b) die Seiten desselben müssen gleich lang seyn, und sich selbst vereinen.

Sechs Sehnen, die sich vereinen, und die ganze Peripherie, das sind 360°, abschneiden müssen, sind sechs Sehnen von 60°.

Wenn ich also mit der Oeffnung einer Sehne von 60° die Peripherie eintheile, und die sechs Sehnen ziehe, so ist dieß Polygon ein regelmäßiges Hexagon.

8) Es soll ein regelmäßiges Hexagon um einen Cirkel beschrieben werden.

Ich lege an die in sechs gleiche Theile getheilte Peripherie sechs Tangenten, die ich so lange verlängere, bis sie einander an ihren Endpunkten erreichen, so sind dieß Tangenten von 60°, die einander gleichen, mit dem Mittelpunkte die Theilungspunkte berühren, und daher ein regelmäßiges Hexagon um den Cirkel beschreiben.

Fig. 8.

9) Es soll ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, dessen Scheitelwinkel 30° beträgt.

Dreißig Grad sind die Hälfte von 60°. Der Centriwinkel, welcher mit der Sehne von 60° ein gleichseitiges Dreieck bildet, ist das Doppelte eines Peripheriewinkels, welcher auf gleichem Bogen steht.

Wenn ich also auf einen Bogen von 60° einen Peripheriewinkel setze, so beträgt derselbe 30°, und dieser ist der Scheitelwinkel des Dreiecks, das eine Sehne von 60° zur Basis hat.

Jede dergleichen Sehnen bc und ba sind also Sehnen von 150°.

α) Es soll ein Trapezion um einen gegebenen Cirkel gelegt werden, das zwei spitze Winkel hat, die gleich sind den Basiswinkeln eines in dem Cirkel beschriebenen Dreiecks.

Ich lege an eine mit der Basis parallel laufende Tangente zwei mit den Seiten des Dreiecks innerhalb der Peripherie parallel laufende Tangenten EF und GH, so müssen, wenn sich die Tangenten vereinen, die beiden untern Winkel gleich werden den Basiswinkeln des Dreiecks. Zwischen diese lege ich nun die vierte Tangente mit der untern parallel, so ist das Trapezion beschrieben.

β) Es soll ein Dreieck um den Cirkel beschrieben werden, welches einem innerhalb des Cirkels liegenden Dreiecke ähnlich ist.

Man ziehe Tangenten, welche mit den Sehnen, die das innere Dreieck bilden, parallel laufen, und verlängere sie so lange, bis sie sich berühren.

10) Ein regelmäßiges Zwölfeck zu beschreiben.

Da ein Zwölfeck die doppelte Anzahl der Ecken eines Sechsecks hat, so hat es auch die zwiefache Anzahl der Seiten des Hexagons, und wird folglich durch Sehnen von 30°, deren zwölf in eine Peripherie gebracht werden können, gebildet werden.

Hauptproblem II.

Fig. 8.

Es soll zu drei gegebenen Punkten, die nicht in einer geraden Linie liegen, ein vierter gefunden werden, der von allen dreien in gleicher Entfernung ist.

Die drei Punkte sind ABD. Zu den neben einander liegenden Punkten AB suche ich den Mittelpunkt c. Derjenige Punkt, welcher perpendikular unter c liegt, bleibt immer von diesen beiden Punkten in gleicher Entfernung. Zu den gegebenen Punkten BD suche ich ebenfalls den Mittelpunkt e. Derjenige Punkt, welcher perpendikular unter e liegt, bleibt von den beiden Punkten BD ebenfalls immer in gleicher Entfernung. Wenn diese beiden Punkte, welche unter c und e liegen, zusammentreffen, so liegen sie natürlich sowohl von AB als auch von BD in gleicher Entfernung. Da der Punkt R von zwei einzeln genommen immer gleich weit entfernt ist, und B derselbe Punkt bleibt, ich mag ihn mit A oder D zusammenstellen, so ist er auch von allen drei Punkten in gleicher Entfernung, und ich habe zu drei gegebenen Punkten den vierten gefunden, welcher von allen in gleicher Entfernung liegt. Man hat nun aus e und c nur Perpendikel zu fällen, wo diese zusammentreffen, da ist der gesuchte Punkt R.

Abgeleitete Aufgaben.

Fig. 9.

1) Durch drei gegebene Punkte ABD, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel zu beschreiben.

Ich muß zuerst das Centrum des zu beschreibenden Cirkels suchen. Das Centrum liegt von allen Punkten der Peripherie, daher auch von den drei hier gegebenen, in gleicher Entfernung.

Ich suche also, wie vorher, diesen Punkt. Die gerade Linie, welche bis zu einem jeden derselben geht, ist der Radius des Cirkels. Ich darf also nur mit der Cirkelöffnung von dem Punkte R aus bis A den Bogen beschreiben.

Fig. 34.

2) Um ein gegebenes Dreieck einen Cirkel zu beschreiben.

Man betrachte die Ecken des Dreiecks als drei gegebene Punkte, zu welchen man den vierten x sucht, und beschreibe mit der Oeffnung xA einen Cirkel, dieser wird (aus dem oben angeführten Grunde) die Ecken des Dreiecks berühren.

Fig. 11.

3) Einen gegebenen Kreisbogen zu vollenden.

Man suche zuerst den Mittelpunkt des Kreisbogens; dann betrachte man die Endpunkte mit dem Mittelpunkte als drei gegebene Punkte. Man suche zu demselben den vierten Punkt wie vorher, so ist dieser das Centrum des zu suchenden Cirkels, aus gleichem Grunde. Den Mittelpunkt mußte ich deswegen suchen, weil ein anderer Punkt außer ihm zwar gleiche Entfernung von den drei gege-

benen Punkten, aber nicht den diesem gegebenen Bogen zukommenden Radius hätte finden lassen.

4) Zu einem gegebenen Kreisbogen einen andern zu finden, welcher mit dem ersten parallel läuft.

Man suche das Centrum des gegebenen Kreisbogens so wie vorher, und beschreibe von demselben aus mit einer andern Oeffnung den Kreisbogen, so wird dieser mit dem gegebenen parallel laufen.

Fig. 12.

5) In ein gegebenes Dreieck einen Cirkel zu beschreiben.

Die Peripherie des Cirkels muß alle drei Seiten des Dreiecks berühren. Ich muß also denjenigen Punkt aufsuchen, von welchem aus alle drei Seiten in gleicher Entfernung sind.

Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Winkels eine gerade Linie in die entgegenstehende Seite zieht, so muß diese Linie denjenigen Punkt der gegenüberliegenden Seite treffen, welcher dem Winkel am nächsten ist. Zieht man aus dem Mittelpunkte eines andern Winkels ebenfalls eine gerade Linie bis in die entgegengesetzte Seite, so wird diese denjenigen Punkt treffen, welcher dem Winkel von der entgegenstehenden Seite am nächsten ist. Da wo sich die beiden Linien durchkreuzen ist folglich der gemeinschaftliche Punkt, von welchem aus die Berührungspunkte der Linien am nächsten sind, und in den auch die Linie treffen muß, die aus der Mitte des dritten Winkels kommt; dieses ist der wirkliche Mittelpunkt des Dreiecks.

Nenne man den Mittelpunkt C, die Winkel des Dreiecks ABD, so ist

$$CA = CB = CD.$$

Beschreibe ich nun von da aus die Entfernung bis zum Berührungspunkte der Seiten des Dreiecks in einen Cirkel, so ist das Dreieck beschrieben.

Hauptproblem III.

Fig. 13.

Es soll eine Linie AB in eine Anzahl gleicher Theile zerlegt werden.

1) Wenn ich die Linie AB nach Gefallen verlängern oder verkürzen könnte, so dürfte ich sie nur mit beliebiger Oeffnung des Cirkels eintheilen. Da mir aber die Linie AB gegeben ist, so darf ich ihre Länge nicht ändern. Aber eine andere Linie CB kann ich ihr ansetzen, die ich nach Gefallen verlängern, verkürzen, und in eben so viel Theile theilen kann, als AB getheilt werden soll. Wenn ich von dem Endpunkte dieser getheilten Linie auf den Endpunkt von AB eine Linie, und nun parallel von einem jeden Theilungspunkte Linien ziehe, so müssen die zwischenliegenden Theile einer und derselben Linie gleich seyn, weil die Parallellinien überall in gleicher Entferung bleiben, und folglich wäre die Theilung vollbracht.

Anmerkung. Ist die Anzahl der Theile sehr groß, so kann man sich auf folgende Weise helfen. Man macht die gegebenen Linien zur Basis eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen beide andere Seiten man um ein Bedeutendes verlängert. Man theilt nun die Hypothenuse dieses Dreiecks in die erforderliche Anzahl von gleichen Theilen, und zieht von einem jeden dieser Theile Perpendikularlinien in die Basis des genannten Dreiecks.

Abgeleitete Aufgaben.

Fig. 14.

1) Zwei oder mehrere ungleiche Linien in proportionirte Theile zu theilen.

Die Theile dieser Linien sollen sich verhalten wie die Ganzen, daher müssen sie alle in gleich-

viel Theile zerlegt werden. Die längste Linie sey DE. Diese theile ich zuerst in die erforderliche Anzahl gleicher Theile. Darauf nehme ich über dem Mittelpunkte der Linie DE einen Punkt C an, und ziehe aus diesem Punkte auf die Endpunkte der Linie DE die Linien CD und CE, und eben so aus dem Punkte C Linien auf die Theilungspunkte der Linie DE. In diese dadurch entstandene Figur ziehe ich nun die andern gegebenen kleinern Linien, und zwar so, daß ihre Endpunkte die Linien CD und CE erreichen, und daß sie mit der Linie DE parallel laufen. So müssen die Linien, welche von C auf die Theilungspunkte von DE gehen, auch die andern kürzern in die gleiche Anzahl proportionirter Theile zerlegen, weil sie im Punkte C zusammenlaufen, und die gegebenen Linien parallel sind.

Fig. 15.

2) AE, ED und Ac sind drei Proportionallinien, denen die vierte noch fehlt. Ich will diese suchen.

Ich weiß, daß in Dreiecken alle Seiten in einem Verhältnisse stehen, ich nehme also die Linie AE zu einer, und die zweite Proportionallinie ED zur zweiten Seite eines Dreiecks AED. Ich trage auf die Seite AE die dritte Proportionallinie Ac, und lege dann auf die Grenze c der Linie eine Proportionallinie bc, die mit ED parallel läuft, so ist bc die Proportionallinie des Dreiecks AED; folglich verhält sich

$$AE : DE = Ac : bc.$$

Also ist bc diejenige Linie, welche mit Ac in demselben Verhältnisse steht, wie DE mit AE, mithin die vierte Proportionallinie zu den drei gegebenen Linien.

Fig. 16.

3) Zu zwei gegebenen Proportionallinien die mittlere zu finden.

Die Proportionallinien findet man in den Seiten ähnlicher Dreiecke. Soll nun eine und dieselbe Linie mit zwei Gliedern in Proportion stehen, so muß sie eine gemeinschaftliche Seite zweier verschiedener Dreiecke seyn. Diese finde ich durch folgende Ueberlegung: ich setze die kleine Proportionallinie DB an die größere AD; ich suche von der so verbundenen Linie ABD den Mittelpunkt C, und beschreibe einen Halbcirkel AEB. Fälle ich nun auf den Theilungspunkt D einen Perpendikel, so kann ich diesen zur gemeinschaftlichen Kathete zweier rechtwinkligen Dreiecke machen, und daher muß er (ED) auch die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn (vergl. Fig. 56 im dritten Cursus und die Erklärung).

Fig. 17.

4) Eine gegebene Linie AB in das mittlere und äußere Verhältniß zu theilen.

Wenn ich die Hälfte der gegebenen Linie an das Ende der ganzen rechtwinklig ansetze, und diesen rechten Winkel durch eine gerade Linie verbinde, so ist diese Verbindungslinie die Hypothenuse dieses so gebildeten rechtwinkligen Dreiecks. Diese theile ich mit der Hälfte der gegebenen Linien in zwei Theile EC und CB. Da die Hypothenuse länger ist, als die gegebene Linie, so wird sie durch die Hälfte derselben in zwei ungleiche Theile zerlegt. Mit dem größern Theile BC theile ich die gegebene Linie ebenfalls in zwei ungleiche Theile BD und DA, so daß BD gleich ist BC, so ist dieses Stück die mittlere Proportionallinie zwischen dem kleinern Theile und der ganzen gegebenen Linie,

oder die Linie ist in das mittlere und äußere Verhältniß getheilt.

Denn nehme ich den größern Theil BD oder CB der gegebenen Linie zur Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel BG und CG der gegebenen Linie AB gleich sind, und beschreibe mit der Cirkelöffnung CB einen Kreis, so muß die Linie DB als Radius gleich seyn der Linie CB. Das Dreieck CBD ist daher ein gleichschenkliges. Der Winkel BCD ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, und folglich auch DCB gleich CBG, denn es sind ja die Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke, die sich gleich verhalten müssen, folglich sind auch die Dreiecke CGB und DCB einander ähnlich; daher verhält sich die Linie DC zu CB, wie CB zu CG. Nun ist aber CD der kleinere, CB der größere Theil, und CG die ganze gegebene Linie; mithin ist der größere Theil die mittlere Proportionallinie zu dem kleinern Theile und der ganzen gegebenen Linie.

III. Fig. 17.

5) Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Scheitelwinkel die Hälfte eines seiner Basiswinkel enthalte.

Ich nehme eine gleiche Linie, und theile diese in das mittlere und äußere Verhältniß; dann nehme ich die mittlere Proportionallinie zur Basis AC des Dreiecks. Auf diese setze ich die Schenkel gleich der Linie AB. Da sich nun der kleinere abgeschnittene Theil AD zum Theile BD, wie sich dieser zum ganzen Schenkel AB verhält, so verhält sich auch derselbe Theil AD zur Basis AC, wie sich diese zu AB oder überhaupt zu einem der gleichen Schenkel des Dreiecks. Ziehe ich nun von dem Theilungspunkte eine gerade Linie in den ent-

gegenstehenden Winkel C, so entsteht dadurch das Dreieck BDC. Von diesem ist AD die Basis, und diese verhält sich zur Basis des größern AC, wie sich dieselbe AC zu einem der gleichen Schenkel AB verhält. Nun ist der Winkel a ein gemeinschaftlicher Winkel beider Dreiecke; also hat das Dreieck ADC mit dem Dreiecke ABC einen gemeinschaftlichen Winkel und zwei in gleichem Verhältnisse stehende Seiten, und die beiden Dreiecke sind daher einander ähnlich. Da das Dreieck ABC ein gleichschenkliges ist, so muß auch ACD ein solches seyn; folglich ist die Linie DC auch gleich AC, also auch gleich dem Theile BD; daher ist auch das Dreieck DCB ein gleichschenkliges Dreieck, und die Winkel r und o müssen sich also auch gleich verhalten. Der Winkel s muß aber ebenfalls gleich seyn dem Winkel o, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke. Ist o gleich einem jeden einzelnen Winkel r oder s, so ist er auch gleich der Hälfte von rs zusammengenommen, oder der Hälfte des Basiswinkels; also war die Aufgabe gelöset und bewiesen.

Zusatz. Ich will wissen, wie viel Grad der Scheitelwinkel beträgt. Da er ein Halb eines jeden Basiswinkels ist, so denke man sich die beiden untersten Winkel in zwei gleiche Theile, so wären alle Winkel des Dreiecks in fünf gleiche Theile zerlegt. Es enthält also o den fünften Theil der Summe aller Winkel des Dreiecks, das ist, den fünften Theil von zwei rechten Winkeln; also $\frac{1}{5}$ von $180° = 36°$.

Daraus ergiebt sich auch die Lösung der Aufgabe:

§. 18.

6) Eine Sehne von 36° zu finden.

Man hat dann nur einen Centriwinkel von so viel Graden zu suchen. Man betrachtet den

Radius als einen gegebenen Schenkel eines Dreiecks, dessen Scheitelwinkel 36° betragen soll. Letztern findet man, wenn man die gegebene Seite, das ist hier der Radius, in das mittlere und äußere Verhältniß theilt. Der größere Theil DB muß die gesuchte Sehne seyn, weil der Median einer ins mittlere und äußere Verhältniß getheilten Linie die Basis eines Dreiecks ist, dessen Scheitelwinkel ½ des Basiswinkels oder 36° beträgt.

Fig. 19.

7) In einen Cirkel ein regelmäßiges Zehneck zu beschreiben.

Da zehn Mal 36° die ganze Peripherie des Cirkels ausmachen, so bilden zehn Sehnen von 36° auch ein regelmäßiges Zehneck. Ich habe also nur dieses zu suchen.

Zusatz. Die Sehne von 72° wird daher ein regelmäßiges Pentagon geben.

Unmittelbar aus dem Hauptproblem löset sich folgendes:

Fig. 20.

8) Aus drei gegebenen Linien ein Dreieck zu beschreiben.

Ich weiß

a) daß diese Linien sich in den Endpunkten vereinen sollen;

b) daß die Vereinigung in drei Punkten geschehen muß, so daß sich zwei und zwei Endpunkte erreichen;

c) daß zwei von ihnen größer seyn müssen, als eine;

d) daß nur eine einzige Art von Dreiecken aus diesem Verhältnisse der Linien hervorgehen kann.

Zuerst muß ich die Vereinigungspunkte der Linien suchen, das ist, denjenigen Punkt, wo die Endpunkte der Linien zusammentreffen. Diesen finde ich, indem ich jede Linie einzeln im Cirkel fasse, und als Radius eines Bogens von excentrischen Kreisen betrachte, da wo diese Bogen sich schneiden, da ist der Vereinigungspunkt der Radien, das ist, der gegebenen Linien, die nun zu einem Dreiecke verbunden sind, und folglich ist auch das Dreieck gebildet, zu dem die Seiten gegeben waren.

Fig. 21.

9) Es soll einem gegebenen Dreiecke ein anderes ähnlich gemacht werden.

Ein Dreieck wird dnrch eine Proportionallinie in ähnliche Dreiecke getheilt. Wenn ich daher in das gegebene Dreieck ABC eine Proportionallinie beschreibe, so ist das dadurch entstandene Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Soll dieß außer dem gegebenen Dreieck ABC beschrieben werden, so trage ich die Proportionallinien ab und bc auf die eben beschriebene Weise heraus, und erhalte dadurch dasselbe Dreieck, welches die Proportionallinie mit den von ihm abgeschnittenen Theilen der Seiten bildet, das ist ein Dreieck abc, welches dem gegebenen ABC ähnlich ist.

Fig. 22.

10) Es ist ein Polygon ABGDE gegeben, ich soll ein ähnliches abgde beschreiben, wozu die Linie ae gegeben ist.

Zuerst weiß ich, daß ich ein Polygon ansehen kann, als aus einer Menge von Dreiecken bestehend, die ich erhalte, sobald ich Diagonallinien wie AD, AG ziehe. Wenn ich diese Dreiecke alle nach der gegebenen Proportion ähnlich mache, also

ade = ADE, adg = ADG, agb = AGB, so werden auch die daraus zusammengesetzten Polygone einander ähnlich seyn. Diese Verhältnißlinien findet man, wenn man zu jedem Polygondreiecke nach dem gegebenen Verhältnisse die Proportionallinien sucht. Man trägt nämlich ae in AE, und von dem Punkte e mit DE legt man parallel die Proportionallinie de, dann wieder von d aus mit DG die Linie dg, und von g aus die Linie gb mit BG parallel. Diese Figur ist denn nun herauszutragen, und man bekommt ein dem gegebenen ähnliches Polygon abgde.

Denn AE : DE = ae : de
AD : DG = ad : dg
AG : GB = ag : gb

AEDGB = aedgb.

Fig. 23.

11) Einem gegebenen Winkel einen andern gleich zu machen.

Der Winkel hängt ab von der Neigung seiner Schenkel. Wenn ich daher den Schenkeln wieder eine gleiche Neigung gebe, so erhalte ich einen gleichen Winkel. Diese gleiche Neigung aber kann auf folgende Weise gefunden werden. Ich ziehe eine Linie BC, auf die der Winkel gezeichnet werden soll. Ich fasse die Schenkel des gegebenen Winkels A in den Cirkel, und beschreibe beliebige Punkte dc der Schenkel. Mit derselben Cirkelöffnung beschreibe ich dieselben auch an B die Bogen dc. Nun suche ich die dritte Hülfslinie, die mir die Entfernung der Schenkel angiebt, indem ich die Cirkelöffnung dc nehme, und dieselbe in dc der Linie BE trage; von d aus schneide ich den Bogen C, und lege durch diesen Schneidungspunkt e die Linie G, so muß der Winkel B dem Winkel

A gleich seyn. Denn Bc = Ac, Bd = Ad, und dc = dc. Wo gleiche Länge, da gleiche Neigung.

Fig. 24.

12) An die Peripherie eines gegebenen Cirkels einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen gleich ist.

Der Winkel um den Cirkel muß durch Tangenten gebildet werden.

Ich lege also zuerst eine Tangente AB an den Cirkel. Auf diese Tangente errichte ich den perpendikularen Radius CB. Es fehlt mir nun nur noch die Lage der andern Tangente. Diese erhalte ich durch folgende Betrachtungen: Ich setze den äußern Winkel x des gegebenen Winkels GAE an den Radius CB. Der zweite Schenkel des Winkels u innerhalb des Cirkels ist der Radius CD. An diesen Radius lege ich die Tangente AD, so ist dadurch das Trapezion ADCB entstanden. Nun sind x + o, x + s, r mit s zweien rechten Winkeln gleich, folglich ist der Winkel u gleich r, und eben so der äußere Winkel x des gegebenen Winkels GAE auch dem Winkel r. Da der äußere Winkel samt dem innern Nebenwinkel sind, so müssen gleiche äußere Winkel auch gleiche innere haben, folglich ist x gleich r, so muß auch o gleich s seyn. Mithin ist der Winkel GAE an die Peripherie gelegt.

Fig. 25.

13) Um die Peripherie eines Cirkels ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ABC ähnlich sey.

Ich nehme zwei Winkel r und s, und lege sie auf die vorher beschriebene Weise an eine Tangente AC der Peripherie, also daß x = r und p = s. Durch die Berührungspunkte der Radien ED und

EG, die zur Gleichmachung der Winkel erforderlich waren, lege man zwei Tangenten, welche sich selbst und mit der dritten AC vereinen, so ist das um den Cirkel beschriebene Dreieck ABC dem gegebenen ABC ähnlich.

Fig. 26.

14) Von einem gegebenen Cirkel ein Segment abzuschneiden, das einen gegebenen Winkel faßt.

Ich nehme einen Schenkel CB des Winkels, und lege ihn als Tangente an den Cirkel. An diese Tangente setze ich den gegebenen Winkel, und verlängere den Schenkel BD bis zur Peripherie, so ist dieser die Sehne des Cirkels, und der abgeschnittene Theil der Peripherie ist das gesuchte Segment; denn es wird von den Schenkeln des Winkels abgeschnitten, der dem gegebenen gleich gemacht worden.

Fig. 27.

15) In einem gegebenen Cirkel ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich sey.

Ich weiß, daß ein rechtwinkliges Dreieck im Cirkel allezeit den Diameter zur Hypothenuse hat; der rechte Winkel liegt an der Peripherie. Es sind noch die beiden spitzen Winkel gleich zu machen. Um dies zu thun, setze ich einen Winkel des gegebenen Dreiecks an den Diameter. Ich verlängere den Schenkel an die Peripherie. Von demselben Punkte ziehe ich die andere Sehne bis an das andere Ende des Diameters, so ist die Aufgabe gelöset. Denn wenn ein spitzer Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks dem andern gleich gemacht ist, so muß auch der dritte, der den Rest enthält, gleich seyn dem dritten des gegebenen Dreiecks.

Fig. 27.

16) Zu einem gegebenen Winkel das Segment, das er in sich faßt, zu finden.

Da der Winkel eines Segments aus einer Tangente und einer Sehne besteht, welche nach der Größe des Winkels einen Theil des Cirkelbogens abschneidet, so darf ich nur deu gegebenen Winkel an eine Tangente setzen, so schneidet die Sehne, als zweiter Schenkel des zu suchenden Winkels, das Segment ab.

17) Eine Parabel zu beschreiben.

Die Krümmung einer parabolischen Linie giebt der Radius Vector.

Dieser ist aber allezeit gleich der zu seiner Ordinate gehörigen Abscisse samt dem vierten Theil des Parameters oder der Verlängerung bis zur Directrix. Man nehme also willkührlich eine Axe an, und theile diese in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Man nehme dann nach Gefallen den Parameter, und theile diesen in vier gleiche Theile. Den vierten Theil des Parameters abgezogen von dem obersten Punkte der Axe giebt den Brennpunkt I, und in derselben Entfernung von diesem obersten Punkte ist die Directrix DF. Ich nehme nun von den Theilungspunkten r, s, t, u, v aus allezeit die Cirkelöffnung bis zum Punkte R der Directrix, und schneide die durch denjenigen Theilungspunkt, von dem aus ich die Cirkelöffnung bis zur Directrix genommen habe, rechtwinklig gezogene Linie, z. B. sp, aus dem Brennpunkte I, so habe ich den Radius Vector zur Ordinate sp. Dieß fortgesetzt mit allen Linien, die durch die Axe AB gehen, giebt den Radius Vector zu allen Ordinaten.

Nun ziehe man durch die Schneidungspunkte eine krumme Linie, so wird diese die Parabel seyn; denn die Krümmung wird ja durch den Radius Vector bestimmt.

18) Durch einen gegebenen Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen.

Aus der Directrix fälle ich einen Perpendikel auf den gegebenen Punkt. Dieser ist gleich dem Radius Vector, den ich bis zu denselben Punkt E ziehe. Von dem obersten Punkte D des Perpendikels aus der Directrix ziehe ich eine gerade Linie bis in den Brennpunkt. Diese Linie ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks DED. Ziehe ich nun durch diese Linie perpendikular eine gerade Linie BA in den Scheitelpunkt E, so schneidet diese Linie nur in diesem Punkte die Parabel, und ist daher die gesuchte Tangente.

19) Den Brennpunkt einer gegebenen Parabel zu finden.

Da der Brennpunkt gerade so viel von dem Scheitelpunkte der Parabel entfernt ist, als der vierte Theil des Parameters beträgt, so darf ich nur den vierten Theil des Parameters in einen Cirkel fassen, und diesen von dem obersten Punkte der Axe abschneiden.

Eben so finde ich auch den Parameter, wenn ich den Brennpunkt weiß; denn die ganze Ordinate, die durch den Brennpunkt geht, ist dem Parameter gleich; oder auch, die zur Ordinate am Brennpunkte gehörige Abscisse vier Mal genommen muß auch den Parameter geben, da diese dem vierten Theile des Parameters gleich ist.

Des

Lehrbuchs

der

geometrischen Verhältnisse

vierte Abtheilung.

Flächenverhältnisse.

Vierter Cursus

enthaltend

die Uebung im Auffassen und Combiniren einer doppelten Dimension nach Höhe und Grundlinie.

---

§. 1.

In einer Ebene kann ich nach verschiedenen Richtungen Linien ziehen, kann Linien von verschiedener Richtung vereinen; ich kann durch Linien einen Raum einschließen. Der durch Linien eingeschlossene Raum heißt eine Fläche.

Fig. 1.

Mit einer geraden Linie kann ich keine Fläche begrenzen, denn sie giebt mir nur eine Länge an. Ihr äußerster Punkt ist die Grenze dieser Länge. Ich kann aber eine Linie nach einer andern Richtung AD ziehen, die der Richtung AB entgegen ist; wenn ich eine Linie auf AB in perpendikularer Richtung ziehe, so entfernt sich der äußerste Punkt D am schnellsten von dem Punkte A, und unter allen dem Perpendikel gleichen Linien, wie Ac, Ae, Af, die ich mir auf AB denken kann, ist der oberste Punkt des Perpendikels am weitesten von der Linie entfernt. Nur von dem Punkte A sind die Punkte c, e, f in gleicher Entfernung. Der Abstand von der Linie AB selbst ist um so geringer, je größer die Neigung ist.

Fig. 2.

Denke ich mir bis zum Perpendikel zwei gerade Linien gelegt und mit der Grundlinie verbunden, so entsteht eine Dreiecksfläche; der entfernteste Punkt von der Grundlinie ist der Winkel C über derselben. Die Entfernung in gerader Richtung zeigt den Perpendikel Cd an. Man sieht also, daß

die dreieckige Figur eine Ausdehnung nach der Grundlinie AB und die andere nach dem Perpendikel dC hat. Die Ausdehnung nach der Grundlinie nenne ich Länge, die Ausdehnung nach dem Perpendikel auf der Grundlinie nenne ich Höhe *). Setze ich auf dieselbe Grundlinie andere Linien, die ein Parallelogram oder ein Trapezion bilden, so wird ein Perpendikel von dem entferntesten Punkte der Fläche über der Grundlinie immer die Höhe anzeigen. Wenn die Fläche eine Cirkelfläche ist, so wird die niedrigste der wagerechte Diameter die eine, und der senkrechte die andere Ausdehnung geben.

Eine jede Fläche hat also eine zwiefache Ausdehnung, nämlich nach Grundlinie und Höhe.

Die äußersten Punkte einer wagerechten Linie geben die Ausdehnung nach einer, die äußersten Punkte der senkrechten Linie nach der andern Richtung.

Der größte Perpendikel auf die Grundlinie in irgend einer Figur ist die Höhe derselben, und die größte Ausdehnung, die rechtwinklig durch den Perpendikel geht, ist die Länge oder Ausdehnung nach der Grundlinie.

A.
Entstehung der Flächen.

§. 2.

Flächen können begrenzt werden, wenn eine Linie so oft wiederholt wird, daß sie einen Raum einschließt. Wird eine gegebene Linie drei Mal wiederholt und mit sich verbunden, so schließt sie eine gleichseitige Dreiecksfläche, wird sie vier Mal

*) Es ist die Richtung, welche ein schwerer Körper nimmt, welcher herabfällt.

mit sich verbunden, so schließt sie ein Quadrat oder eine Rhombenfläche, wird sie fünf oder sechs Mal wiederholt, und mit sich selbst so verbunden, daß sie einen Raum einschließt, so entsteht eine regelmäßige Pentagonfläche u. s. f. Eine gegebene Linie kann aber auch getheilt, und die verschiedenen Theile können dann unter einander selbst oder mit der ganzen Linie zu Rechtecken verbunden werden.

Fig. 3.

1) Eine Linie AB ist gegeben. Ich nehme eine ihr gleiche Linie, und setze sie rechtwinklig in den Punkt A, so habe ich die Ausdehnung nach doppelter Richtung. Ich setze dieselbe Linie auch an das Ende B, und verbinde die Endpunkte C und D noch einmal durch eine gleiche Linie, so muß ein Quadrat entstehen, denn vier gleiche Linien rechtwinklig verbunden, schließen einen viereckigen Flächenraum von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln ein.

Denke man sich, daß die gegebene Linie AB sich nach perpendikularer Richtung so lange erweiterte, bis sie der AB gleich wäre, so würde daraus ebenfalls eine Quadratfläche entstehen. Mithin kann

ein jedes Quadrat als das Produkt aus einer gegebenen Linie angesehen werden;

und umgekehrt:

das Produkt einer gegebenen Linie, durch sich selbst multiplicirt, giebt ein Quadrat.

Fig. 4.

2) Eine gegebene Linie ab ist der Länge nach sechs Mal wiederholt. Dieselbe Linie ab ist vier Mal wiederholt, und also perpendikular auf a er-

richtet. ab mit sich selbst multiplicirt, giebt ein Quadrat. Da ich vier Mal ab in dem Perpendikel ea habe, so giebt dieser mit vier Mal ab, die in der Grundlinie liegen, vier Mal vier, das sind sechszehn Quadrate aus ab oder das Quadrat aus ae.

$$(ae \times ae = ae^2).$$

Von der ganzen Grundlinie ag bleiben noch zwei Linien ab übrig. Setze ich an diese auch noch, wie vorher, vier Mal das Quadrat ab der Höhe nach auf, so habe ich vier Schichten des Quadrats ab über einander, und sechs Schichten neben einander. Da der Grundlinie nach sechs Quadrate ab neben einander, und immer vier über einander liegen, so müssen im Ganzen 4×6 Quadrate aus ab in der Figur vorhanden seyn. Da die Höhe dieser Figur zwei ab weniger beträgt, als die Grundlinie, so ist sie ein Rechteck, welches aus 4 ab, das ist aus ae, und $6 \times$ ab, das ist aus ag oder aus Vermehrung der Höhe mit der Grundlinie entstanden ist.

Wenn man also die Höhe mit der Grundlinie multiplicirt, so entsteht ein Rechteck,

oder

jedes Rechteck ist das Produkt aus Höhe und Grundlinie.

Fig. 5.

3) Eine gegebene Linie AB ist in mehrere ungleiche Theile getheilt, AE, AF, AB. Der Theil AE ist zur Breite, und die ganze Linie zur Länge eines Rechtecks ACBD genommen. Das ganze Rechteck ACBD ist daher das Produkt aus AE $\times$ AB. Die Theilungspunkte EFB sind hinwiederum durch die Linien EL, FK zu Rechtecken verbunden. Diese Linien sind allesamt der Linie

AE gleich; denn es sind Parallellinien zwischen Parallellinien. Mithin haben alle Rechtecke die AE Höhe gemeinschaftlich. Das Rechteck ACEL ist das Produkt aus AE × AE, und da AE sich selbst gleich seyn muß, ein Quadrat. Das Rechteck ACFK ist das Produkt aus AE × AF. Da AF das Stück EF länger ist als AE, so beträgt auch die Länge dieses Rechtecks so viel als EF mehr als dessen Höhe. Das Rechteck EFKL ist ist aber hinwiederum ein Rechteck aus der Linie AE und dem Stücke EF, also aus AE × EF. Das Rechteck ELBD ist das Produkt aus den Linien AC × EB.

Da alle rechte Produkte aus demselben Theile AE der gegebenen Linie AB und aus andern Theilen, als AF, EF u. s. f. sind, so folgt daraus, daß alle in dem Rechtecke aus der gegebenen ganzen Linie AB und demselben Theile AE entstanden enthalten seyn müssen.

Also

wenn eine Linie in eine beliebige Anzahl von Theilen getheilt wird, so ist das Rechteck aus der ganzen gegebenen Linie und dem größten ihrer Theile allen übrigen Rechtecken aus allen Theilen und derselben ganzen Linie gleich.

Fig. 6.

4) Eine gegebene Linie AB ist in C in zwei gleiche Theile zerlegt, also AC und CB. Die halbe Linie AC ist mit sich selbst multiplicirt, und dadurch zu einem Quadrat erhoben. Wenn ich die andere Hälfte ebenfalls quadrire, so entsteht in CB ein gleiches Quadrat CEFB. Das Ganze stellt dar ein Rechteck aus der halben Linie AC und aus der ganzen AB. Die beiden Quadrate aus der halben Linie bilden dieses Rechteck.

Es ist daher auch

das Quadrat der halben Linie gleich dem halben Rechtecke aus der ganzen und halben Linie;

oder

das Rechteck aus der ganzen und halben Linie ist gleich dem zwiefachen Quadrat der halben Linie.

$$AC \times AB = 2AC^2.$$

Wenn dieselbe Linie AB hinwiederum zum Quadrat erhoben werden soll, so muß die eine Seite derselben gleich werden der andern, und folglich müssen zwei Rechtecke aus der halben und ganzen Linie zusammengesetzt werden, dann wird die Höhe der Grundlinie gleich.

Es ist daher das Quadrat einer Linie gleich dem doppelten Rechtecke aus der ganzen und halben Linie, und folglich dem vierfachen Quadrate der halben Linie.

Fig. 7.

5) Eine gerade Linie AB ist in zwei beliebige Theile, AE und EB, getheilt. Der Theil AE ist zur Höhe des Rechtecks AGBK, oder des Rechtecks aus dem Theile AE und der ganzen Linie AB (aus AE $\times$ AB) genommen. Fälle ich aus dem Theilungspunkte E einen Perpendikel ED, so entstehen zwei Rechtecke AEGD und EBDK. Die Linie AG ist der AE gleich gemacht, mithin ist das Rechteck AGED das Produkt aus der Linie AE, oder die Linie AE mit sich selbst multiplicirt, und daher ein Quadrat. Das Rechteck EK ist aus dem Theile EB und dem Perpendikel ED, oder, da dieser AC gleich ist, aus AE $\times$ EB, das ist aus den beiden ungleichen Theilen. Nun sind aber das Quadrat AE sowohl, als das Recht-

eck AE ≍ EB, integrirende *) Theile des Rechtecks AE ≍ AB.

Es erhellt daraus also

Wenn man eine gegebene Linie in zwei ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der ungleichen Theile gleich dem Quadrate dieses Theiles und dem Rechtecke aus beiden Theilen.

Fig. 8.

6) Eine gegebene Linie AB theile ich in zwei beliebige Theile AC und CB. Ich quadrire zunächst die ganze Linie, dadurch erhalte ich das Quadrat AH. Aus dem kleinern Theile CB und der ganzen Linie beschreibe ich die gleichen Rechtecke GI und CH, dann sind in diesem Quadrate folgende Linien einander gleich: dem Theile AB wird gleich GB, BH, GH, CL, EI; dem Theile AC sind gleich EF und GL, weil sie zwischen Parallellinien liegen; ferner, da AE gleich gemacht ist CB, so ist von AG ein solcher Theil weggenommen, als CB beträgt, mithin muß gerade ein Theil, der dem Stücke AC gleich ist, übrig bleiben, denn AG = AB; daher müssen EA, FC, IB ebenfalls gleich seyn AC.

Dem Theile CB sind gleich FI, LH. Da AE gleich gemacht ist AB, und CF und BI gleich sind AE, so sind also auch die sechs Linien, CB, FI, LH, EG, FL, HI, einander gleich. In der ganzen Figur sind daher je sechs Linien einander gleich. Nämlich sechs sind gleich der ganzen gegebenen Linie AB, sechs dem Theile AC und eben so viele Theile CB. ACEF ist aus Linien gebildet, die sämtlich dem Theile AC gleich sind, mit-

*) das Ganze ausmachende.

hin ist es das Quadrat aus AC. Eben so ist LHFI aus vier dem Theile CB gleichen Linien gebildet, oder das Quadrat des Theiles CB. Die Rechtecke EFGL und FCBI sind aus den beiden Segmenten CB und AC entstanden, und als solche die Produkte aus gleichen Linien, also einander gleich. Alle diese Rechtecke und Quadrate zusammengenommen machen das Quadrat der ganzen Linie aus.

Wenn daher eine gegebene Linie in zwei beliebige Theile getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie gleich den Quadraten der beiden Theile und dem doppelten Rechtecke aus diesen beiden Theilen.

Fig. 9.

7) Eine gerade Linie AB ist durch den Punkt C in zwei gleiche, und durch den Punkt D in zwei ungleiche Theile AD und DB getheilt. Aus den beiden ungleichen Theilen AD und DB bilde ich ein Rechteck AkhD. Die Hälfte CB quadrire ich. In diesem Quadrate liegt noch ein Theil des Rechtecks AkhD, und zwar das Rechteck aus demjenigen Theile, welcher zwischen den beiden Theilungspunkten C und D und dem kleinern Theile DB der gegebenen Linie besteht. Verlängere ich den Perpendikel hD bis zum Punkte g des Quadrats der halben Linie, so ist dieser Theil hg gleich CD. Denn Ce ist gleich CB; Dg ist ebenfalls gleich CB; Dh ist gleich DB. Nehme ich DB von CB oder von ef weg, so bleibt noch CD oder eg übrig; nehme ich dieselbe DB oder Dh oder Dg weg, so bleibt noch ein gleiches Stück wie CD übrig; also sind eg und gh gleich CD, und das Rechteck legh ist daher ein Quadrat aus CD oder aus demjenigen Theile, welcher zwischen den beiden Theilungspunkten liegt. In

demselben Quadrate aus der halben Linie ist noch die Linie Kh verlängert. Die Verlängerung hm ist gleich DB, und das Rechteck ghmf ist aus CD × DB, und mithin gleich dem Rechtecke CDlh. Da Dh gleich ist DB, so ist DhBm wiederum ein Quadrat aus dem kleinern ungleichen Theile DB. Im Ganzen sind also vorhanden die Rechtecke 1) DB × AD, 2) ^{2}DB × AC, 3) ^{2}CD × DB und drei Quadrate CB^2, DB^2, CD^2.

Gleich müssen seyn die Rechtecke, die aus gleichen Linien gebildet sind, wie AClk und CBlm (das ist DB × AC), und CDlh mit ghmf (das ist DB × DC). Das Rechteck ADkh aus den beiden ungleichen Theilen DB × AD ist um das Rechteck DB × CD, das ist aus dem kleinern Theile DB und dem Stücke zwischen den Theilungspunkten größer, als das Rechteck DB × AC, das ist aus der halben Linie und dem kleinern Theile.

Das Quadrat der halben Linie CBef enthält

a) das Quadrat des kleinern Theils DB;

b) das Quadrat des Stücks CD zwischen den Theilungspunkten, und das zwiefache Rechteck aus dem Theile DB und dem zwischen den Theilungspunkten gelegenen Stücke CD.

Das Rechteck aus den beiden ungleichen Theilen DB × AD enthält das Rechteck aus dem kleinern ungleichen Theile und der halben Linie (DB × AC), und ein Rechteck aus dem kleinern Theile und dem Stücke CD zwischen den Theilungspunkten (DB × CD).

Das Rechteck aus der halben Linie und dem Stücke zwischen den Theilungspunkten besteht aus dem Quadrate des kleinern Theils CD und aus dem Rechtecke des Stücks zwischen den beiden Theilungspunkten CD und dem kleinern Theile DB der gegebenen Linie.

Das Rechteck lefm und CDeg aus der halben Linie und aus dem Stücke zwischen den beiden Theilungspunkten besteht aus dem Rechtecke CD × DB und aus dem Quadrate zwischen den Theilungspunkten.

Wenn man alle hierauf gefundenen Flächen zusammensetzt, so wird sich die ganze Figur und Fläche wiederum also erzeugen:

a) das Rechteck DC × DB samt dem Quadrat CD giebt das Rechteck CB × CD, das ist:

Wenn man eine gerade Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck aus dem kleinern Theile und dem Stücke zwischen den Theilungspunkten, samt dem Quadrate dieses Stücks, gleich dem Rechtecke aus der halben Linie und demselben Theile zwischen den Theilungspunkten.

b) Das Rechteck DB × CD mit dem Quadrate DB zusammengesetzt giebt das Rechteck DB × CB.

Man sieht also, daß

Wenn man eine gegebene Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile zerlegt, das Quadrat des kleinern ungleichen Theils, samt dem Rechtecke aus dem kleinern ungleichen Theile und dem Stücke zwischen den Theilungspunkten gleich ist dem Rechtecke aus der halben Linie und aus dem kleinern Theile der gegebenen Linie.

α) Das Quadrat DB ist gleich dem Rechtecke CD × CB weniger dem Rechtecke DB × CD.

β) Das

β) Das Rechteck $DB \times CD = DB \times CB$ weniger DB^2.

c) Das Rechteck $CB \times CD$ samt dem Rechtecke $DB \times CD$ ist gleich dem Rechtecke $DB \times AD$.

Oder:

Das Rechteck aus dem kleinern ungleichen Theile und der halben Linie, samt dem Rechtecke aus dem kleinern Theile und dem zwischen den Theilungspunkten gelegenen Stücke, ist gleich dem Rechtecke aus beiden ungleichen Theilen der gegebenen Linie.

d) $DB^2 + 2DB \times CD + CD^2$ sind gleich CB^2. Nun sind aber $DB^2 + 2CD \times DB$ gleich dem Rechtecke aus beiden ungleichen Theilen $DB \times AD$. Es fehlt also noch CD^2, dann ist $DB \times AD = CB$. Man setze also zu $DB \times AD$ noch CD^2, so geht aus dem Ganzen hervor folgender

Hauptsatz.

Wenn man eine gegebene Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile zerlegt, so ist das Rechteck aus den beiden ungleichen Theilen samt dem Quadrate zwischen den Theilungspunkten gleich dem Quadrate der halben Linie.

Fig. 10.

8) Eine gegebene Linie AB ist um einen beliebigen Theil BD verlängert. Ich quadrire die gegebene Linie AB und die ganze Linie samt der Verlängerung AD.

Man kann alle größere Flächen aus den kleinern entstehen lassen.

Da die gegebene Linie AB um das Stück BD verlängert ist, so müssen auch alle die zum Quadrat AD gehörigen Seiten um ein Gleiches länger werden, als die Seiten des Quadrats aus AB. Der Inhalt dessen, was das Quadrat AD mehr beträgt, als AB, liegt um das Quadrat AB herum, nämlich an der Seite ein Rechteck aus einer Seite und der Verlängerung BD. Da die Höhe des Quadrats AD der Grundlinie gleich ist, so muß dieselbe Verlängerung BD auch in der Höhe des Quadrats vorhanden seyn, und mithin dasselbe Rechteck BD × AB auch horizontal an der Höhe desselben liegen.

Werden Rechtecke BD × AB an das Quadrat AB gelegt, so bleibt oben noch ein rechter Winkel fer übrig, dessen Schenkel der Verlängerung gleich seyn müssen. Wird dieser Winkel durch ein Quadrat aus BD = ferh ausgefüllt, so entsteht erst dadurch das Quadrat der ganzen Linie samt der Verlängerung.

Es geht daraus also hervor:

Wenn man eine gegebene Linie AB um ein beliebiges Stück BD verlängert, so ist das Quadrat der ganzen Linie samt der Verlängerung das doppelte Rechteck aus der gegebenen Linie und der Verlängerung, samt dem Quadrate dieser Verlängerung, mehr als das Quadrat der gegebenen Linie,

und überhaupt

ist das Quadrat einer größern Linie allemal gleich dem Quadrate der kleinern, mehr dem doppelten Rechtecke aus der kleinern Linie und der Differenz zwischen derselben und der größern, samt dem Quadrate dieser Differenz.

Zusatz. Ein Rechteck aus der kleinern Linie und der Differenz zwischen ihr und der größern, samt dem Quadrate der Differenz, ist daher gleich dem Rechtecke aus der Differenz und aus der größern Linie. Der Unterschied zwischen dem Quadrate einer kleinern und größern Linie ist daher auch gleich dem Rechtecke aus der kleinern Linie und der Differenz, oder dem doppelten Rechtecke aus der gegebenen größern Linie und der Differenz weniger dem Quadrate der Differenz.

Fig. 11.

9) Die gegebene Linie AB ist um den Theil BD verlängert, und durch den Punkt C in zwei gleiche Theile getheilt. Zuerst ist das Rechteck aus der gegebenen Linie AB samt der Verlängerung, und aus der Verlängerung also das Rechteck BD $\times$ AD gebildet. Da die Linie AB in zwei gleiche Theile AC und CB zerlegt, und auf C ein Perpendikel gefällt ist, so muß dieses Rechteck BD $\times$ AD enthalten A das doppelte Rechteck aus der halben Linie und der Verlängerung und das Quadrat der Verlängerung BD. Ferner ist die halbe Linie samt der Verlängerung (CD) quadrirt. Da die Linie CD um das Stück BD länger ist als CB, so muß das Quadrat CD auch das doppelte Rechteck BD $\times$ CB samt dem Quadrate BD mehr betragen als CB^2, oder das Quadrat der halben Linie. Das Rechteck BD $\times$ AD enthält die ganze Differenz zwischen den beiden Quadraten CB und CD. Denn es enthält das doppelte Rechteck BD $\times$ BC + BD^2.

Es folgt also hieraus:

Wenn man eine Linie im Mittelpunkte theilt, und dann um ein beliebiges Stück verlängert, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie samt der Ver-

längerung, und aus der Verlängerung (BD × AD) gleich der Differenz zwischen dem Quadrate der halben Linie (CB) und dem Quadrate der halben Linie samt der Verlängerung (CD^2).

Es muß daher auch

das Quadrat der halben Linie samt dem Rechtecke aus der Differenz und der ganzen Linie samt der Differenz gleich seyn dem Quadrate der halben Linie samt der Verlängerung.

Das Quadrat der halben Linie ist also die Differenz zwischen dem Rechtecke BD × AD und dem Quadrate CD.

Aus Parallellinien.

§. 3. Fig. 12.

Zwei Parallellinien AB und CD bleiben in gleicher Entfernung. Werden diese durch zwei andere Parallellinien AC und gk verbunden, so entstehet ein Parallelogramm ACkg. Setzt man an die beiden Ecken der Grundlinien zwei anders sich neigende Parallellinien ce, kf, so hat man zwei Parallelogramme, nämlich das Quadrat ACkg und die Rhomboide cekf von gleicher Grundlinie und Höhe. Die Seiten des Parallelogramms laufen parallel und neigen sich folglich beide gleich von den Seiten des ersten, mit denen sie also auch gleiche Winkel bilden, folglich sind auch die diesen Winkeln c und k entgegenstehenden Seiten Ae und gf einander gleich. Die andern Seiten der Dreiecke ce und kf, CA und kg sind ebenfalls gleich, da sie zwischen zwei parallellaufenden Linien selbst parallel laufen, und folglich sind die abgeschnittenen Dreiecke ACe und gkf congruent. Betrachte ich nun die beiden Parallelogramme ACgk und

Cekg, so besteht jedes derselben aus dem Trapezion Cegk und aus einem der gleichen Dreiecke. Da die Dreiecke gleich sind, und das Trapezion sich selbst gleich seyn muß, zu welchem Dreiecke es auch gesetzt werde, so geht daraus hervor, daß beide Parallelogramme gleich seyn müssen. Denke man sich verschiedene Parallelogramme eben so gezeichnet; wenn Grundlinie und Höhe sich gleichen, so wird allezeit an einem Ende dem einen Parallelogramme ein solches Dreieck fehlen, welches es auf der andern Seite hat.

Es geht daraus hervor:

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Fig. 13.

10) Wenn die Länge der Grundlinie bleibt, die Höhe aber verliert, so wird auch die Größe ein Rechteck aus der halben Höhe und der ganzen Grundlinie, eben so bleibt dann noch ein gleiches Rechteck übrig, und mithin ist jedes Rechteck ein Halb des ganzen Rechtecks. Nimmt man nur $\frac{1}{3}$ der Höhe und die ganze Grundlinie, so bleibt auch nur $\frac{1}{3}$ der Größe u. s. f. Denn jede Fläche ist ja Höhe und Länge, oder die Ausdehnung nach horizontaler und verticaler Richtung. Nehme ich einer Fläche die Höhe, so muß ich schlechterdings auch die Länge nehmen. Nun hat aber ein Parallelogramm überall die Länge der Grundlinie, soviel Mal ich nun Theile der Höhe des Parallelogramms nehme, so viel Schichten der Länge bin ich auch genöthigt zu wiederholen, um ein Rechteck zu bilden.

Da es einerlei ist, ob ich mir die verglichenen Parallelogramme von einerlei oder nur gleicher Grundlinie, ob in einander oder aus einander gezeichnet denke, so gilt im Allgemeinen:

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und verschiedener Höhe verhalten sich so wie ihre Höhen.

Wenn die Höhe bleibt, die Grundlinie aber sich verändert, so verliert oder gewinnt die ganze Größe in eben dem Verhältnisse, als die Grundlinie gewinnt oder verliert.

Es verhalten sich daher

Parallelogramme von ungleicher Grundlinie und gleicher Höhe so wie ihre Grundlinien.

Fig. 14 und 15.

11) Wenn die Höhe und die Breite (Grundlinien) getheilt werden, so wird auch die ganze Fläche der Höhe und Breite nach getheilt.

Wenn die Höhe durch eine wagerechte Linie in zwei, und die Breite ebenfalls durch eine senkrechte Linie in zwei gleiche Theile zerlegt wird, so erscheint dann die ganze Fläche in $2 \times 2 = 4$ gleiche Theile getheilt. Wenn die Höhe durch zwei wagerechte Linien in drei, die Grundlinie aber in zwei gleiche Theile zerlegt wird; so erscheint die ganze Fläche in $2 \times 3 = 6$ kleine Parallelogramme zerlegt.

Die Grundlinie eines jeden der einzelnen Parallelogramme ist die Hälfte der Grundlinie des ganzen Parallelogramms ABCD. Jedes Rechteck ABik und ikgf ist aus der ganzen Grundlinie und einem Drittel der Höhe entstanden; mithin ist auch ABki, oder ikgf, oder CDgf dem dritten Theile des ganzen Rechtecks ABCD gleich. Durch den Perpendikel EL wird aber die Grundlinie ebenfalls wieder in zwei gleiche Theile zerlegt, folglich ist jedes Parallelogramm aus dem dritten Theile der Höhe und der halben Grundlinie, wie CLgk,

gleich der Hälfte des Parallelogramms aus dem dritten Theile der Höhe und der ganzen Grundlinie, mithin auch der Hälfte eines Drittels, das ist $\frac{1}{6}$, des Parallelogramms aus der ganzen Grundlinie und der ganzen Höhe.

Wenn die Höhe in sieben, die Grundlinie aber in fünf gleiche Theile getheilt ist, so erscheint das ganze Parallelogramm in $5 \times 7 = 35$ gleiche zerlegt. Die Höhe des kleinern Parallelogramms ist dann $\frac{1}{7}$, die Grundlinie desselben ist $\frac{1}{5}$ der Grundlinie des größern, und die Größe ist $\frac{1}{35}$; denn diejenigen Linien, welche die Höhe eintheilen, bilden sieben Parallelogramme, deren ein jedes den siebenten Theil der Größe enthält.

Diejenigen Linien hingegen, welche die Grundlinie eintheilen, theilen auch ein jedes Parallelogramm, das dem siebenten Theile eines gegebenen größern gleich ist, in fünf Theile, daher das kleinere Rechteck, welches den siebenten Theil der Höhe, und den fünften der Grundlinie eines Rechtecks gleich ist, der siebente Theil eines Fünftels, das ist der 35ste Theil des Ganzen.

Wenn man also die Theile der Grundlinie mit den Theilen der Höhe multiplicirt, so erhält man die Summe der Rechtecke, welche in dem ganzen Parallelogramme vorhanden sind.

Die Zahlen, welche die Grundlinie und die Höhe eines Parallelogramms ausdrücken, sind die Faktoren der Parallelogramme von ungleicher Grundlinie und ungleicher Höhe.

Parallelogramme von ungleicher Grundlinie und Höhe verhalten sich so, wie sich die Produkte aus der Grundlinie und Höhe verhalten.

Höhe 5, Grundlinie 7, also $5 \times 7 = 35$. Setze man A als ein größeres, b als ein kleineres Parallelogramm.

Die Grundlinie von b $= \frac{1}{7}$ der Grundlinie A. Die Höhe von b ist $\frac{1}{5}$ der Höhe von A; folglich ist die Größe ein Fünftel eines Siebentelsmal A, das ist $\frac{1}{35} \times A$.

$$\text{Höhe von } 6 = \tfrac{1}{8} \times A$$
$$\text{Grundlinie } = \tfrac{1}{6} \times A$$

$$\text{Folglich } b = \frac{\frac{1}{6}}{8} = \tfrac{1}{48} \times A$$

Wenn die Grundlinie eines Parallelogramms 5, die Höhe 3, die Grundlinie eines andern 7, die Höhe 4 betrüge, so würde sich die Größe dieser Parallelogramme verhalten, wie die Produkte aus $3 \times 5 = 15$ und $4 \times 7 = 28$, mithin wie das erste Parallelogramm $\frac{15}{28}$ des zweiten u. s. f.

Fig. 16 a und b.

Wenn durch ein Parallelogramm eine Diagonale gezogen wird, so entstehen zwei Dreiecke, welche mit dem Parallelogramm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Jedes dieser Dreiecke ist ein Halb des Parallelogramms; denn die entgegengesetzten Winkel r, s und t dieser Dreiecke sind Wechselswinkel, und die entgegengesetzten Winkel des Parallelogramms g und h, von denen ein jeder zugleich ein Winkel des Dreiecks ist, sind einander ebenfalls gleich.

Eine Seite des Dreiecks wie AB ist auch zugleich Grundlinie des Parallelogramms; folglich sind die durch die Diagonallinie entstandenen Dreiecke einander gleich. Da diese den ganzen Flächenraum eines Quadrats einnehmen und sich selbst gleich sind, so ist ein jedes Dreieck einzeln genommen ein Halb des Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Da man jedes Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke auflösen kann, so muß ein jedes Parallelogramm, welches mit einem Dreiecke gleiche Grundlinie

und Höhe hat, auch der Hälfte desselben gleich seyn.

So wie der Perpendikel das Maaß der Höhe eines Parallelogramms ist, so ist er es auch von einem Dreiecke. So wie gleiche Perpendikel und gleiche Grundlinien gleich große Parallelogramme voraussetzen, so sind auch die Dreiecke als halbe Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleichem Perpendikel einander gleich.

Da ein jedes Dreieck als Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe angesehen werden kann, so wird auch der Flächeninhalt desselben in eben dem Verhältnisse sich verändern, als der Flächeninhalt des Parallelogramms sich verändert. Nun vermehrt sich aber letzterer um eben so viel, als die Höhe gewinnt, und verliert eben so viel aliquote Theile, als die Höhe sich vermindert, folglich wird auch der Flächeninhalt eines Dreiecks in eben dem Verhältnisse sich vermehren oder vermindern, in welchem sich die Höhe vermindert oder vermehrt.

Der Lehrer suche dem Irrthume vorzubeugen, als müsse auch ei. aliquoter Theil der Höhe nothwendig mit einem aliquoten Theile der Größe verbunden seyn, als müsse die Hälfte der Höhe auch die Hälfte des Dreiecks seyn, indem er darauf hinzeigt, daß allemal an der Hälfte der Dreiecke nur eine Proportionallinie, keinesweges eine der Grundlinie gleiche Seite des Dreiecks vorhanden seyn könne. Er mache darauf aufmerksam, daß der Theil, den ein Dreieck durch Veränderung der Höhe verbinde, hinwiederum ein Dreieck sey, so wie das Parallelogramm auch nur ein Parallelogramm verlieren konnte.

Dasselbe gilt auch, wenn die Höhe bleibt, und die Grundlinie sich verändert, und man kann da-

her alle Grundsätze, welche von den Parallelogrammen gelten, auch auf die Dreiecke anwenden.

Nämlich:

a) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe verhalten sich gleich. Fig. 17.

ABC = ADB = AEB.

b) Dreiecke von gleicher Grundlinie und ungleicher Höhe verhalten sich wie ihre Höhen. Fig. 18.

Dg = $\frac{1}{2}$ Cg, folglich △ ADB = $\frac{1}{2}$ ACB;
gE = $\frac{1}{3}$ gC, folglich △ AEB = $\frac{1}{3}$ ACB.

c) Dreiecke von ungleicher Grundlinie und gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. Fig. 19.

AD = $\frac{1}{2}$ AB, folglich ADC = $\frac{1}{2}$ ABC;
AE = $\frac{1}{4}$ AB, folglich △ ACE = $\frac{1}{4}$ ABC.

d) Dreiecke von ungleicher Grundlinie und ungleicher Höhe verhalten sich so, wie die Produkte aus ihrer Grundlinie und Höhe. Fig. 20.

Ab = 3 Cp = 3; ABC = 3 × 3 = 9;
Ah = 1 = pk = 1, folglich Afh = $\frac{1}{9}$ × ACB;
△ Adi = $\frac{4}{9}$ LCB u. s. f.

Anmerk. Aus dem Verhältnisse der Grundlinie ergiebt sich auch der Inhalt eines Dreiecks; denn ein Dreieck ist ein Halb des Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Man braucht nun nur das Parallelogramm zu suchen, welches mit dem gegebenen Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, so ist das Dreieck $\frac{1}{2}$ dieses Parallelogramms. Gesetzt das Parallelogramm des Dreiecks betrüge in seiner Grundlinie $\frac{1}{4}$, in der Höhe $\frac{1}{7}$ eines größern Parallelogramms, so wäre ersteres $\frac{1}{28}$ des letztern. Das Dreieck, dessen Grundlinie $\frac{1}{4}$, und dessen Höhe $\frac{1}{7}$ eines Parallelogramms betrüge, würde ein Halb des 28stels betragen, das ist $\frac{1}{56}$ u. s. f.

Fig. 21.

Die Fläche eines regelmäßigen Polygons besteht aus so viel gleichseitigen Dreiecksflächen, als dasselbe Seiten hat. Wenn ich also alle Seitenflächen zur Grundlinie DA, und den Perpendikel aus dem Scheitelpunkte zur Höhe DC eines Dreiecks CDA mache, so ist dieß ein Dreieck, welches die Grundlinie aller Polygondreiecke zur Grundlinie, und die Höhe derselben zur Höhe hat. Dieses Dreieck muß daher gleich seyn der Summe aller Dreiecke eines Polygons. Nun machen aber die Polygondreiecke den Inhalt des ganzen Polygons aus; folglich ist

ein Dreieck, welches die Polygonseiten zur Grundlinie, und die Höhe eines aus dem Mittelpunkte desselben gefällten Perpendikels zur Höhe hat, gleich dem Inhalt des ganzen Polygons.

$$\begin{array}{r} CDFn + CEn = CDEF \\ CEn = Fna \\ \hline CDFn + Fna = CDEF \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} CDi & = & cdq \\ cir & = & Dqz \\ Crs & = & qzo \\ Cst & = & zox \\ ctu & = & oxp \\ cuf & = & kpF \\ Cfg & = & pFE \\ \hline firstu & = & CDFE \\ CDFE & = & CDA \\ \hline firstu & = & CDA. \end{array}$$

Je kleiner und mehr die Seiten eines Polygons werden, desto mehr nähert sich die Gestalt desselben der Cirkelperipherie. Denke man sich die Seiten eines Polygons so unendlich klein, daß sie in einen Punkt fielen, so würde es nicht mehr von der Gestalt des Cirkels zu unterscheiden seyn, und das Polygondreieck würde in einer Linie fallen. Die Summe der Seiten stellt dann die Peripherie, wie der Radius die Höhe des Polygondreiecks dar. Nehme ich nun die Cirkelperipherie zur Grundlinie, den Radius zur Höhe eines Dreiecks, so muß die Fläche desselben auch der Cirkelfläche gleich seyn.

Es ist also

die Cirkelfläche allezeit gleich der Fläche eines Dreiecks, welche die Peripherie zur Grundlinie, und den Radius zur Höhe hat.

Die Linien, welche ein Dreieck bilden, sind allezeit bestimmt, und können in keinem andern Verhältnisse stehen. S. 105. Da die Gestalt des Dreiecks aus den gegebenen Linien bestimmt ist, so ist es auch die Höhe und Grundlinie. Sind daher die Seiten eines Dreiecks gleich, so ist auch nothwendig die Höhe gleich, und es verhalten sich die Dreiecksflächen, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich.

Fig. 22 und 23.

Folgesätze.

Ein Quadrat AGEB. Die eine Seite AB desselben ist zur Grundlinie des Dreiecks ABC genommen, die Höhe C liegt außerhalb der Höhe des Quadrats, aber in horizontaler Richtung mit der Höhe G und E des Quadrats. Es ist also das Dreieck ABC ein Dreieck, welches mit einem Quadrate gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat;

folglich ist es gleich der Hälfte des Quadrats ABGE *).

Fig. 23.

Die Seite DF der Rhomboide DKFI ist gleich der Seite BC, die Seite FI der AB, und der Winkel DFI dem Winkel ABC gleich gemacht; folglich ist das Dreieck DFI dem Dreiecke ABC gleich.

Das Dreieck ABC ist aber gleich der Hälfte des Quadrats AGEB, folglich muß auch das ihm gleiche Dreieck DFI ebenfalls gleich seyn der Hälfte des Quadrats AGEB.

Das Dreieck DFI besteht aus zweien Seiten und der Diagonallinie der Rhomboide DKIF, folglich ist es gleich der halben Rhomboide. Da dasselbe Dreieck DFI gleich ist dem halben Quadrate AGEB und der halben Rhomboide DKFI, so müssen sich die Hälften dieser beiden Parallelogramme gleich seyn. Die zwei Halben machen aber ein Ganzes, mithin giebt die doppelte Größe des Dreiecks DFI oder ABC die Größe der ganzen Rhomboide oder auch die Größe des ganzen Quadrats AGEB. Es kann daher die Größe des Quadrats AGEB sowohl, als die Größe der Rhomboide DKFI als aus gleichen Größen erzeugt gedacht werden, folglich ist das Quadrat AGEB gleich der Rhomboide DKFI, und überhaupt

*) Als Uebung kann man noch hinzusetzen, daß ABC gleich seyn müsse ABE, denn es sind Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe.

Ferner $\triangle ABC = \triangle ABr + BrC$
$\triangle ABE = \triangle ABr + ArE$

$ArE = BrC.$

Durch solche und ähnliche Uebungen wird das Abstractionsvermögen geübt, und die reine mathematische Darstellung der Größe eingeleitet.

wenn sich die Halben gleichen, so müssen sich auch die Ganzen gleich seyn.

Fig. 24 und 25.

Ein rechtwinkliches Dreieck ABC ist mir gegeben. Ich quadrire die Kathete AB, und nenne das Quadrat AIHB. Aus dem untersten Winkel I zur Linken des Quadrats ziehe ich eine gerade Linie bis zu dem entgegengesetzten spitzen Winkel C des gegebenen Dreiecks. Diese Linie bildet mit der Seite IA des Quadrats und mit der Hypothenuse AC ein stumpfwinkliches Dreieck IAC, die Seiten IA kann als Grundlinie und der Punkt C als die Höhe des Dreiecks IAC angesehen werden. Das Maaß dieser Höhe giebt der Perpendikel aus dem höchsten Punkte auf die Grundlinie. Der höchste Punkt liegt überall in der Linie CH, welche aus C mit der Grundlinie AI parallel läuft. BA ist ein solcher Perpendikel, der aus der Linie CH auf die Grundlinie AI fällt, mithin ist er das Maaß der Höhe des Dreiecks IAC. Die Linie AI kann ich aber auch ansehen als Grundlinie, und AB als Höhe des Quadrats AIHB; dann ist ICB ein Dreieck, welches mit dem Quadrate AIHC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; folglich ist △ ICB ½ × des Quadrats AHIC.

Eben so quadrire ich die andere Kathete BC, und beschreibe aus F bis in den Winkel A des gegebenen Dreiecks BC eine gerade Linie. Dadurch entsteht das stumpfwinkliche Dreieck AFC. Betrachte ich die Seite CF als Grundlinie, so ist der Winkel A der höchste Punkt des Dreiecks ACF und der Perpendikel BC aus der Linie AG, die mit CF parallel läuft, ist das Maaß der Höhe. CF kann ich aber auch als Grundlinie, und CB als Höhe des Quadrats BCFG betrachten, daher ist ACF gleich ½ BCFG.

Fig. 26.

An dem Endpunkte A der Hypothenuse setze ich rechtwinklich eine gerade Linie, welche jener selbst gleich seyn soll, und nenne den Endpunkt derselben D. Von diesem Punkte aus ziehe ich eine gerade Linie bis zu dem entgegenstehenden Winkel B des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks ABC, so entsteht hinwiederum ein stumpfwinkliches Dreieck DBA. Der stumpfe Winkel dieses Dreiecks besteht aus dem rechten Winkel r und aus dem einen spitzen Winkel n des gegebenen Dreiecks. Der stumpfe Winkel des stumpfwinklichen Dreiecks ICA, Fig. 25, besteht aus dem rechten Winkel o und demselben spitzen Winkel n. Die rechten Winkel r und o sind einander gleich, folglich auch die stumpfen Winkel, welche entstehen, wenn man den spitzen Winkel n zu r oder zu o setzt; also sind die stumpfen Winkel IAC und BAD einander gleich. IA (Fig. 25) und BA (Fig. 26) sind Seiten des Quadrats. Die Linie AD ist der Hypothenuse AC gleich gemacht. Es haben also beide stumpfwinkliche Dreiecke IAC und BAD einen und einen gleichen Winkel, zwei und zwei gleiche Seiten, und sind also einander gleich. Da nun das Dreieck IAC ein Halb des Quadrats ABHI ausmacht, so ist auch das gleiche Dreieck BAD ein Halb desselben Quadrats.

Auf den Endpunkt C der gegebenen Hypothenuse errichte ich ebenfalls einen ihr gleichen Perpendikel, so liegen zwei Winkel sp neben einander. Aus dem Punkte B ziehe ich eine gerade Linie bis in den Endpunkt E des eben errichteten Perpendikels, so entsteht das stumpfwinkliche Dreieck BCE. Die Seite BC ist die Kathete. Diese ist gleich der ihrer Quadratseite CF (Fig. 25). Die Seite CE ist gleich gemacht der Hypothenuse AC. Der stumpfe Winkel des Dreiecks ACF (Fig. 25) ist aus dem rechten Winkel o und aus dem spitzen p zusammen-

gesetzt. Eben so ist der stumpfe Winkel BCE aus dem rechten s und demselben spitzen p entstanden; mithin ist op = sp. Da die Dreiecke AFC und BCE zwei gleiche Seiten und einen gleichen Winkel haben, so müssen sie einander gleich seyn. Nun ist aber ACF gleich der Hälfte BCGF, folglich ist auch △ BCE der Hälfte desselben Quadrats BCFG gleich.

Wenn man daher aus der Kathete eines rechtwinklichen Dreiecks und der Hypothenuse ein stumpfwinkliches Dreieck so beschreibt, daß der stumpfe Winkel gleich sey einem rechten Winkel o, samt dem entgegenstehenden spitzen Winkel n, so ist das Dreieck gleich der Hälfte des Quadrats aus denselben Katheten des gegebenen Dreiecks.

Also: ABD $= \frac{1}{2}$ AB^2 und BCE $= \frac{1}{2}$ BC^2.

Anmerk. Man mache darauf aufmerksam, daß, wenn die größte Kathete die eine Seite ist, der kleinste Winkel zu dem genannten rechten Winkel komme, wie in CDA der Winkel n zu r, und umgekehrt: wenn die kleinste Kathete wie BC die eine Seite ist, der größte spitze Winkel p zum rechten Winkel s komme.

Fig. 26.

Aus dem rechten Winkel B desselben gegebenen Dreiecks ziehe ich eine Linie, welche mit AD parallel läuft, und daher die Hypothenuse AC in L rechtwinklich durchschneidet, und verlängere sie so weit, daß sie von der Hypothenuse an gerechnet derselben völlig gleich sey: LK = AC. Werden die Endpunkte dieser beiden Parallellinien LK und CD durch eine mit der Hypothenuse parallel laufende Linie verbunden, so entstehen die Parallelogramme ALKD und LKEC. Von dem erstern kann DA als Grundlinie, und die Linie AL als die Höhe angesehen werden. Nun kann aber die

Linie

Linie AD auch als Grundlinie, und der Punkt B als Höhe des Dreiecks BAD betrachtet werden; dann ist LA das Maaß der Höhe des Dreiecks, und auch das Maaß der Höhe des Parallelogramms, mithin hat das Dreieck BDA mit dem Parallelogramme DALK gleiche Grundlinie und Höhe, daher ist es gleich der Hälfte des Parallelogramms ALKD. Eben so hat das Dreieck BCE mit dem Parallelogramme LKEC die Grundlinie EC und die Höhe LC gemeinschaftlich, folglich ist das Dreieck BCE auch $\frac{1}{2}$ von KLCE.

Es geht also daraus hervor:

Wenn man die Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreiecks quadrirt, und aus dem rechten Winkel des Dreiecks eine gerade Linie perpendikular durch die Hypothenuse legt, so entstehen aus dem Quadrate zwei Parallelogramme, von denen ein jedes das doppelte Dreieck aus derselben Hypothenuse und der entgegenstehenden Kathete enthält. Ein Dreieck aus der Seite des Quadrats der Hypothenuse und aus der Kathete ist gleich der Hälfte des Rechtecks, welches durch eine aus dem rechten Winkel des gegebenen Dreiecks durch die Hypothenuse perpendikular gefällte Linie entstanden ist.

Nun ist aber dasselbe Dreieck zugleich der Hälfte des Quadrats derjenigen Kathete gleich, mit dem es eine Seite gemeinschaftlich hat. Zwei solcher Dreiecke zusammengenommen müssen daher sowohl die Größe des Quadrats der einen Kathete, als auch desjenigen Parallelogramms, welches mit dem Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, ausmachen.

Wenn man daher aus dem rechten Winkel eines Dreiecks perpendikular auf die Hypothenuse eine gerade Linie zieht, so ist das Rechteck aus dem dadurch entstandenen Theile und der ganzen

Hypothenuse gleich dem Quadrate derjenigen Kathete, welche durch denselben Perpendikel aus dem rechten Winkel eingeschlossen wird,

das ist $AL \times AC = AB^2$
und $LC \times AC = BC^2$

Nun sind aber die beiden Rechtecke aus den Segmenten AC und LC und der ganzen Hypothenuse (das ist $AL \times AC = ADKL$ und $LC \times AC = LKEC$) gleich dem Quadrate der ganzen Hypothenuse ($AL \times AC + LC \times AC = AC^2$). Beide Rechtecke müssen auch gleich seyn den beiden Quadraten der Katheten; folglich muß auch

das Quadrat der Hypothenuse gleich seyn den Quadraten beider Katheten:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Recapitulation.

Fig. 25.

$$AIC = \tfrac{1}{2} AB^2$$

(F. 16. p. 168 a) $AcF = \tfrac{1}{2} CB^2$ (F. 16. p. 168 b)

$$2AIC = AB^2 \text{ und } 2ACF = CB^2$$

Fig. 25 $AC = AD$ Fig. 26.

$$AI = AB$$

$\llcorner$ on (Fig. 25) $=$ rn (Fig. 26.)

$\triangle$ AIC (25) $=$ BAD (26.)

$$2BAD = AB^2$$

Fig. 27 $BC = FC$ Fig. 25.

$$EC = AC$$

$$\llcorner\ sp = op$$

$$BCE = AFC$$

$$BCE = \tfrac{1}{2} CB^2$$

Fig. 27.

$$DAB = \frac{1}{2} AL \times AC$$

$$AL \times AC = 2\,DAB$$
$$2\,DAB = AB^2 \text{ Fig. 25.}$$

$$AL \times AC = AB^2$$

$$BCE = \frac{1}{2} LC \times AC$$

$$LC \times AC = 2\,BCE$$
$$2\,BCE = BC^2$$

$$LC \times AC = BC^2$$

Fig. 27.

$$AL \times AC + LC \times AC = AC^2$$
$$AB^2 + BC^2 = AL \times AC + LC + AC$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

---

a) Da alle die Sehnen eines Cirkels, welche auf einem Radius stehen, ein rechtwinkliges Dreieck bilden, von dem der Diameter die Hypothenuse ist, so ist das Quadrat des Diameters allezeit gleich dem Quadrate der Sehnen, welche einen rechten Winkel einschließend auf demselben stehen.

b) Die Sehne von 90° bildet mit zwei Radien immer ein rechtwinkliges Dreieck, folglich ist auch das Quadrat der Sehne von 90° gleich dem Quadrate zweier Radien.

c) Eben so ist auch das Quadrat einer Secante immer gleich dem Quadrate der Tangente, samt dem Quadrate des Radius, und das Quadrat des Radius immer gleich dem Quadrate des Sinus und Cosinus.

d) Die Cirkelflächen verhalten sich so, wie sich die Quadrate der Radien verhalten *). Wenn ich daher

*) Dieß folgt aus Fig. 21 b, indem man das Rechteck aus der halben Peripherie und dem Radius, welcher der Cirkelfläche gleich ist, als fortgesetztes Quadrat des Radius ansehen kann.

den Diameter zu dem Radius der einen, und die beiden auf demselben stehenden, einen rechten Winkel einschließenden Sehnen zu den Radien eines andern Cirkels mache, so ist die Cirkelfläche, die den Diameter zum Radius hat, gleich vier solchen Cirkelflächen, die den Radius zum Diameter haben.

Fig. 28.

e) Im Dreiecke ABC ist AC der Diameter; AB und BC sind die einen rechten Winkel einschließenden und auf demselben stehenden Sehnen.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Radius $DF = BC$

$$DG = AB$$

$$DI = AC$$

$$\circ DF : \circ DG \text{ und } \circ DI = DF^2 : DG^2 \text{ und } DI^2$$

$$DF^2 + DG^2 = DI^2$$

$$\circ DF + \circ DG = \circ DI$$

folglich ist der Cirkel aus dem Radius DI gleich den beiden Cirkeln, welche DF und DG zu Radien haben.

Fig. 29.

f) Eine gerade Linie AB, welche ich in C in zwei gleiche, und in D in zwei ungleiche Theile zerlege. Ich fälle auf den Mittelpunkt C einen Perpendikel, welcher der halben gegebenen Linie gleich gemacht ist. Den obersten Punkt des Perpendikels verbinde ich durch zwei gerade Linien AE und EB. Dadurch habe ich erhalten die rechtwinkligen Dreiecke ACE und ECB. Von diesen rechtwinkligen Dreiecken sind AE und EB die Hypothenusen. Da das Quadrat der Hypothenuse gleich ist den beiden Quadraten der Katheten, so ist $AE^2 = AC^2 + CE^2$. Nun sind aber die Katheten AC und CE einander gleich, folglich ist

$AE^2 = 2 \times AC^2$, oder zwei Mal das Quadrat der halben Linie. Auf den ungleichen Theilungspunkt D fälle ich ebenfalls einen Perpendikel FD von der Hypothenuse EB aus. Dadurch erhalte ich das rechtwinklige Dreieck BDF. Von diesem Dreiecke ist FB die Hypothenuse, folglich ist $FB^2 = BD^2 + DF^2$. Nun sind aber die Katheten BD und DF einander gleich, folglich ist $BD^2 + DF^2$ auch zwei Mal BD^2.

Ich verbinde die beiden Perpendikel EC und FD. Von dem obersten Punkte F des kleinern Perpendikels ziehe ich eine mit der gegebenen AB parallel laufende Linie FG bis in den größern Perpendikel. Dadurch entsteht das rechtwinkliche Dreieck EGF, von dem EF die Hypothenuse, FG und EG die Katheten sind. EG ist aber gleich GF, und GF ist gleich CD; folglich ist auch $EG^2 + GF^2 = 2CD^2$. Nun ist EF^2 gleich $EG^2 + GF^2$, folglich muß es auch $2CD^2$ seyn; oder: das Quadrat (EF) des zwischen den beiden Perpendikeln liegenden Theils der Hypothenuse EB ist gleich dem doppelten Quadrate des zwischen den Theilungspunkten gelegenen Theils der Linie selbst.

Endlich verbinde ich den Punkt A mit dem obersten Punkte des kleinern Perpendikels durch AF. Diese Linie ist die gemeinschaftliche Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks ADF und AEF, folglich ist das Quadrat derselben gleich $AD^2 + DF^2$ und auch $AE^2 + EF^2$.

Da die Quadrate $AE^2 + EF^2$ und $AD^2 + DF^2$ gleich sind dem Quadrate einer gemeinschaftlichen Hypothenuse, so müssen sie sich auch einander selbst gleich seyn *).

*) Man mache den Schüler darauf aufmerksam, daß AE, EC u. s. f. nur Hülfslinien, und nur AB die gegebene Linie ist; daß man daher auch das ganze Verhältniß nur auf Theile dieser Linie reduciren müsse.

Nun ist aber $AE^2 = 2AC^2$ oder zwei Mal das Quadrat der halben Linie. EFq ist $2CD^2$ oder zwei Mal das Quadrat des zwischen den Theilungspunkten der gegebenen Linie gelegenen Theiles; folglich muß auch $AD^2 + DF^2$ gleich seyn AC^2 und $2CD^2$. Da aber DFq = DBq, so ist auch AD + DB = 2ACq + 2CDq. Es sind aber $AD^2 + DB$ die Quadrate der beiden ungleichen Theile, AC^2 das Quadrat der halben Linie, und CD^2 das Quadrat der zwischen den beiden Theilungspunkten gelegenen Stücks.

Es geht aus diesem also hervor:

Wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile getheilt wird, so sind die Quadrate der beiden ungleichen Theile gleich den beiden Quadraten der gleichen Theile und dem zwiefachen Quadrate des zwischen den Theilungspunkten gelegenen Stücks der Linie.

Fig. 30.

g) Ich ziehe eine gerade Linie AB, welche ich in C in zwei gleiche Theile theile. Auf den Mittelpunkt fälle ich einen der halben gegebenen Linie gleich langen Perpendikel EC. Dann verlängere ich die gegebene Linie um ein beliebiges Stück BD, und empfange dadurch die ganze Linie AD. Auf den Endpunkt D derselben setze ich einen abwärts fallenden Perpendikel DF, welcher der Verlängerungelinie BD gleich ist; eben so setze ich einen gleichen Perpendikel an den Punkt C bis G. Dann verbinde ich die beiden untersten Punkte der Perpendikel CG und DF durch eine mit CD parallel laufende Linie GF. So erhalte ich dadurch drei und drei verschiedene gleiche Linien, nämlich

$$AC = CB = CE$$
$$BD = DF = CG$$
$$CD = EG = GF$$

Verbinde ich den Anfangspunkt A der gegebenen Linie mit dem obersten Punkte E des Perpendikels durch eine gerade Linie AE, so erhalte ich ein rechtwinkliges Dreieck ACE. Eben so giebt eine gleiche Verbindungslinie des Punktes E mit B das rechtwinklige Dreieck ECB. Beide Verbindungslinien sind die Hypothenusen der gleichen Katheten AC und EC. Wenn ich daher AE quadrire, so ist das Quadrat gleich den beiden Quadraten der Katheten. Da nun EC gleich ist AC, so ist auch EC^2 gleich AC^2, und ich kann daher sagen AE^2 ist das doppelte AC^2. Desgleichen ist auch EB^2 das doppelte CB^2. Da nun CB gleich ist AC, so ist auch EB^2 zwei Mal AC^2, und die Quadrate beider Hypothenusen AE und EB zusammen sind vier Mal AC^2. Nun sind aber die beiden Hypothenusen AE und EB hinwiederum Katheten des rechtwinkligen Dreiecks AEB. Von diesem ist die gegebene Linie AB die Hypothenuse. Da das Quadrat der Hypothenuse gleich ist den beiden Quadraten der Katheten, so ist $ABq = EBq + EAq$. Nun ist $EBq + ABq = 4$ Mal ACq, folglich ist auch $ABq = 4 \times ACq$, oder das Quadrat der ganzen Linie ist gleich vier Mal dem Quadrate der halben Linie *)

Jetzt verlängere ich die Linie EB bis in F, das ist, bis in den untersten Punkt des an D gehängten Perpendikels, so erhalte ich das rechtwinkliche Dreieck EGF, von welchem EG und GF zwei gleiche Katheten, und EF die Hypothenuse sind.

*) Obgleich dieser Satz schon da gewesen ist, so gewährt es doch Freude, auf einem neuen Wege einen alten Bekannten zu finden.

Das Quadrat EF muß daher hinwiederum gleich seyn den beiden Quadraten GF + EG. Da beide Katheten EG und GF einander gleich sind, so ist auch das Quadrat der Hypothenuse gleich zwei Mal dem Quadrate einer Kathete. Nun ist aber eine jede dieser beiden Katheten der Linie AD, das ist der halben gegebenen Linie samt der Verlängerung gleich, folglich enthält das Quadrat EF^2 zwei Mal das Quadrat CD^2, d. i. das Quadrat der halben Linie mit der Verlängerung. Da das Quadrat der Linie AE zwei Mal das Quadrat von AC enthält, so enthalten die Quadrate von AE und EF zwei Mal das Quadrat der halben Linie AC und zwei Mal das Quadrat der aus der andern Hälfte und der Verlängerung bestehenden Linie AD.

Endlich verbinde ich die äussersten Punkte A und F mit einander durch eine neue Verbindungslinie, und erhalte dadurch das doppelte Dreieck AEF und ADF, von welchem AF die gemeinschaftliche Hypothenuse ist. Die Quadrate AE + EF sind Quadrate der Katheten, und folglich gleich dem Quadrate der Hypothenuse AF. Eben so sind auch die Quadrate von AD + DF Quadrate der Katheten derselben Hypothenuse AF, und folglich gleich dem einen Quadrate von AF. Da nun AE + EFq gleich ist AFq, und ADq + DFq, ebenfalls gleich ist AFq, so müssen auch die Quadrate der beiden Paar Katheten sich selbst gleich seyn. Also:

$$AE^2 + EF^2 = ADq^2 + DFq^2\ ^{*)}.$$

Da AE^2 + EFq zwei Mal das Quadrat der Hälfte, und zwei Mal das Quadrat der aus der Hälfte und der Verlängerung bestehenden Linie

*) Nun werden die Hülfslinien weggelassen, und nur die in der Linie selbst enthaltenen Verhältnisse aufgesucht.

CD gleich ist, so muß auch ADq + DFq gleich seyn 2 × ACq + 2 × CDq, das ist: das Quadrat der ganzen Linie samt der Verlängerung, und das Quadrat der Verlängerung einzeln genommen (DF), muß gleich seyn dem zwiefachen Quadrate der Hälfte und dem zwiefachen Quadrate der aus der Hälfte und der Verlängerung bestehenden Linie.

$$AE^2 = AC^2 + CE^2$$
$$AC^2 = CE^2$$
$$\overline{AE^2 = 2AC^2}$$

$$FB^2 = FD^2 + DB^2$$
$$FD^2 = DB^2$$
$$\overline{FB^2 = 2DB^2}$$

$$EF^2 = EG^2 + GF^2$$
$$EG^2 + GF^2 = CD^2$$
$$\overline{EF^2 = 2CD^2}$$

$$AE^2 + EF^2 = AF^2$$
$$AD^2 + DF^2 = AF^2$$
$$DF^2 = DB^2$$
$$\overline{AE^2 + EF^2 = AD^2 + DB^2}$$

$$AE^2 + EF^2 = 2AC^2 + 2CD^2$$
$$\overline{AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2}$$

Fig. 31.

h) AB ist der Radius eines Kreises, der in einem concentrischen liegt. AC ist der Radius des äußern Kreises. Denke man sich die Tangente BC

ebenfalls als Radius eines Kreises, so ist das Quadrat des Radius AC gleich dem Quadrate des Radius AB und dem Quadrate der Tangente BC; folglich ist auch von zwei concentrischen Kreisen der größere allemal gleich dem kleinern, samt demjenigen Cirkel, welcher die bis zur Peripherie des größern Kreises verlängerte Tangente des kleinern zum Radius hat.

Wenn ich von dem Quadrate AC das Quadrat AB nehme, so bleibt noch BC^2 oder das Quadrat der Tangente übrig. Wenn ich daher die kleinere Cirkelfläche der größern (AC) nehme, so bleibt noch übrig die Cirkelfläche aus der Tangente BC, oder auch der Ring um die kleinere Peripherie. denn der Unterschied ist entweder der Ring, oder die Cirkelfläche, welche die Tangente BC zum Radius hat.

Es ist folglich

in zwei concentrischen Kreisen der Ring um den innern Kreis gleich der Cirkelfläche, welche die bis zur Peripherie des äußern Cirkels verlängerte Tangente zum Radius hat.

Fig. 32.

i) Ein gegebener Cirkel. Von dem außerhalb der Peripherie gelegenen Punkte D ziehe ich eine gerade Linie durch einen Peripheriepunkt C durch das Centrum H bis zu dem entgegengesetzten Punkte derselben Peripherie A. Den innerhalb der Peripherie gelegenen Theil CA, oder den Diameter, sehe ich an als eine gegebene Linie, und das außerhalb der Peripherie gelegene Stück CD betrachte ich als Verlängerung. Der Radius HC, samt dem Stück CD, ist dann die halbe Linie und die Verlängerung. Da nun das Rechteck aus der Verlängerung und aus der ganzen gegebenen Linie, samt

der Verlängerung, und aus der Verlängerung das Quadrat der Verlängerung, und das doppelte Rechteck aus der Verlängerung enthält (F. 11. p. 163 u. 64), so muß auch das Rechteck aus der ganzen Linie AD und aus dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stück CD gleich seyn dem Quadrate dieses Stücks und dem doppelten Rechtecke aus demselben und dem Radius. Das Quadrat der halben Linie samt der Verlängerung, das ist hier das Quadrat des Radius samt dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stück, enthält aber das Quadrat der Verlängerung, das ist hier CD, das doppelte Rechteck aus der Verlängerung und der halben Linie, das ist 2CD × HC und dem Radius, und das Quadrat der halben Linie, das ist hier also das Quadrat des Radius noch darüber.

Folglich enthält das Quadrat des Radius samt dem außerhalb der Peripherie gelegenen Theile einer Schneidungslinie ein Quadrat des Radius mehr, als das Rechteck aus der ganzen gegebenen Linie samt dem außerhalb der Peripherie gelegenem Stück.

Lege ich aus dem Punkte D noch eine Tangente DE, und führe aus dem Centrum einen Radius bis auf den Berührungspunkt B, so ist der Radius samt dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stücke, das ist HD, die Hypothenuse des Radius HB und der Tangente; folglich sind auch die Quadrate des Radius und der Tangente gleich dem Quadrate des Radius samt dem verlängerten Stücke CD. Wenn aber das Quadrat des Radius diesem Quadrate HD entzogen wird, so enthält es noch eben so viel, als das Rechteck aus dem Stück CD und der ganzen Linie AD beträgt. Von der andern Seite angesehen bleibt dann noch das Quadrat der andern Kathete, das ist das Quadrat der Tangente BD, übrig.

Folglich ist das Quadrat einer Tangente gleich dem Rechtecke aus einer von dem Endpunkte der Tangente ausgehenden Schneidungslinie und aus dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stücke.

$$DC \times DA = DC^2 + 2DC \times CH^2$$
$$DH^2 = DC^2 + 2DC \times CH + CH^2$$
$$\overline{DHq = DC \times DA + CHq}$$

$$CH^2 = HB^2$$
$$DH^2 = CH^2 + BD^2$$
$$\overline{DH^2 - CHq = BD^2}$$
$$DH^2 - CH^2 = DC \times DA$$
$$\overline{BDq = CD \times DA}$$

Zusatz.

Fig. 33.

Wenn die Schneidungslinie AD nicht das Centrum berührt, so fälle ich zunächst einen Perpendikel KF. Von dem Centrum aus ziehe ich dann einen Radius KC nach dem Schneidungspunkte der ganzen Linie. Dieser Radius ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks KFC; daher ist das Quadrat der halben Sehne CF mit dem Quadrate des auf dieselbe gefällten Perpendikels KF gleich dem Quadrate des Radius KC.

Das Rechteck aus der ganzen Sehne samt der Verlängerung CD enthält das Quadrat der Verlängerung und das doppelte Rechteck aus der halben Sehne und der Verlängerung. Nehme ich das Quadrat des Radius dazu, so ist das Rechteck gleich dem Quadrate der halben Linie samt der Verlängerung, oder auch dem Quadrate der halben Sehne samt dem Perpendikel und der Verlängerung. Dieses Quadrat ist aber hinwiederum

gleich dem Quadrate des Radius samt dem Quadrate der Tangente BD. Ziehe ich das Quadrat des Radius ab, so bleibt übrig nach der letzten Ansicht das Quadrat der Tangente, nach der ersten das Rechteck aus der Verlängerung CD und der ganzen Schneidungslinie.

Also

$$\begin{array}{l} DC \times DA + CFq + KFq = DKq \\ DFq = KBq + BDq \\ KBq = CFq + KFq \\ \hline DKq - CFq + KFq = DC \times DA \\ DKq - KBq = DBq \\ \hline DC \times DA = DBq. \end{array}$$

Es ergiebt sich also auch hieraus:

Wenn man also von einem außerhalb der Peripherie gelegenen Punkte eine Schneidungslinie und eine Tangente an die Peripherie legt, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechtecke aus dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stück samt der ganzen Schneidungslinie.

Folgesatz.

Fig. 34.

Wenn man von einem außerhalb der Peripherie gelegenen Punkte mehrere Schneidungslinien zieht, so sind alle Rechtecke derselben, welche aus der ganzen Schneidungslinie und dem außerhalb der Peripherie gelegenen Stücke gebildet sind, gleich dem Quadrate der Tangente, welche von demselben Punkte aus an die Peripherie gelegt wird; folglich sind auch alle Rechtecke aus den Schneidungslinien und aus dem außerhalb der Peripherie gelegenen Theile einander selbst gleich.

$$DG \times DA = DCq$$
$$DE \times DK = DCq$$
$$\overline{}$$
$$DG \times DA = DE \times DK$$

Fig. 35.

k) Ein stumpfwinkliges Dreieck ACB, dessen Seite AC ich so weit verlängere, bis sie perpenpendikular unter dem Winkel B liegt. Aus demselben fälle ich einen Perpendikel BD. Von dieser Verlängerung samt dem Perpendikel ist die Seite BC des stumpfwinkligen Dreiecks als Hypothenuse anzusehen. Daher ist das Quadrat dieser Seite BC gleich dem Quadrate der Verlängerung und dem des Perpendikels. Hierauf quadrire ich die Seite AC des stumpfwinkligen Dreiecks, und erhalte das Quadrat AOZC. Die drei Quadrate AOZC + CLRD + BDGF sind also Quadrate der beiden Seiten. Die dem stumpfen Winkel entgegenstehende Seite AB ist aber die Hypothenuse der Seite AC samt der Verlängerung AD und des Perpendikels BD, folglich auch gleich dem Quadrate der verlängerten Seite samt dem Quadrate des Perpendikels. Nun beträgt aber das Quadrat der verlängerten Seite zwei Rechtecke, welche aus der Verlängerung und der Seite AC bestehen, mehr als die Quadrate der den stumpfen Winkel einschließenden Seiten; also ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel entgegenstehenden Seite gleich den Quadraten der andern Seiten samt dem doppelten Rechtecke, welches aus der einen Seite und der Verlängerung gebildet ist.

Zusammenstellung.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2CD \times AC$$
$$CB^2 = CD^2 + BD^2$$
$$\overline{}$$
$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2CD \times AC.$$

Fig. 36.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Ich fälle aus dem obersten Punkte B einen Perpendikel bis auf den Punkt D in der Basis. Dieser Perpendikel bildet mit den beiden abgeschnittenen Seiten, samt den Segmenten der Basis, zwei rechtwinklige Dreiecke, von welchen er eine gemeinschaftliche Kathete ist. AB ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks ADB, folglich ist das Quadrat der Seite AB gleich dem Quadrate des Perpendikels und dem Quadrate des Segments AD. Die Seite BC ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks BDC, folglich ist auch das Quadrat der einen Seite BC gleich dem Quadrate des Perpendikels samt dem Quadrate des von ihm abgeschnittenen Segments DC. Das Quadrat der Seite AC enthält das Quadrat des Segments AD = IB entgegenstehenden Segmente mit der ganzen Basis, und endlich das Rechteck beider Segmente.

Beide Seiten mit AC zusammen genommen enthalten folgende fünf Flächen: 1) das Quadrat des Perpendikels BD; 2) das Quadrat des kleinern Segments DC; 3) das Quadrat des größern unter der Seite AB gelegenen Segments; 4) das Rechteck aus der Basis und dem der Seite AB entgegenstehenden Segment DC; und 5) dem Rechtecke beider Segmente.

Von diesen fünf Flächen enthält die eine Seite AB nur 1) das Quadrat des Perpendikels, 2) des unter ihr befindlichen Segments AD; folglich enthalten die beiden andern Seiten noch das Quadrat des dieser Seite entgegenstehenden Segments und die beiden Rechtecke. Wenn man nun das übriggebliebene Quadrat des Segments dem Rechtecke aus beiden Segmenten verleihet, so wird dieses Rechteck dem Rechtecke aus demselben Seg-

mente mit der ganzen Basis gleich. Diese beiden Rechtecke bleiben also noch übrig.

Es geht daraus also hervor:

In einem spitzwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich den Quadraten der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Rechtecke aus der Basis und dem entgegenstehenden Segmente, welches durch den aus dem obersten Winkel gefällten Perpendikel abgeschnitten ist.

Zusammenstellung.

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$
$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$
$$AC^2 = AD^2 + 2DC \times AC$$

$$AC^2 + BC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DC \times AC - DC$$

$BC^2 + AC^2 - AB^2$ ist nach Obigem gleich.

$$BD^2 + DC^2 + AD^2 + 2DC \times AC - DC^2$$
$$- BD^2 - AD^2$$

Rest $+ DC^2 - DC^2 + 2DC \times AC$
$+ DC^2 - DC^2 = 0 DC$

---

bleibt $2DC \times AC$

Wenn man die Grundlinie AC im Mittelpunkte e getheilt denkt, so wäre das doppelte Rechteck $eC \times AC$ gleich AC^2. Nun fehlte aber einem jeden solchen Rechtecke aus $DC \times AC$ das Stück De an der Höhe, das ist das Rechteck $De \times AC$ um $eC \times AC$ gleich zu seyn, folglich fehlt dem doppelten Rechtecke $DC \times AC$ auch das doppelte Rechteck $eD \times AC$ um dem Quadrate AC gleich zu seyn; mithin ist $2eD \times AC$

die

die Differenz zwischen $2DC \times AC$ und $AC^2 =$.
Mithin ist auch das Rechteck $2eD \times AC = AD^2$.

b) Da das den Unterschied anzeigende Rechteck $AC \times AC$ mit dem Quadrate der Seite BC gleich ist dem Quadrate der Seite AB, ferner das Quadrat des Perpendikels mit dem Quadrat des kleinern Segments gleich ist dem Quadrat der Seite BC, so wird auch das Quadrat des Perpendikels mit dem Quadrat des kleinern Segments und dem complementirenden Rechteck $2AE \times AC$ gleich seyn dem Quadrate der Seite AB.

$$2Ae \times AC + BC^2 = AB^2$$
$$BD^2 + DC^2 = BC^2$$

$$BD^2 + DC^2 + 2Ae \times AC = AB^2$$

3) Es ist aber das Quadrat des Perpendikels mit dem Quadrat des größern Segments AD gleich dem Quadrat AB; folglich ergiebt sich daraus, daß das Rechteck $2Ae \times AC$ gerade um das Quadrat des kleinern Segments weniger beträgt, als das Quadrat des größern Segments, daß also

$$AD^2 = 2Ae \times AC + DC^2.$$

Mithin ist das complementirende Rechteck zugleich die Differenz der Quadrate beider Segmente. Also

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$
$$BD^2 + DC^2 + 2Ae \times AC = AB^2$$

$$DC^2 = AD^2 - 2Ae \times AC.$$

Da die Quadrate AB und BC jedes für sich dem Quadrate des Perpendikels gleich sind, so beruht der Unterschied nur auf den Quadraten der beiden Segmente.

c) Da das Quadrat des Perpendikels mit dem Quadrate des unter einer Seite gelegenen Seg-

ments gleich ist dem Quadrate dieser Seite, so geht daraus hervor, daß das Quadrat des Segments die Differenz zwischen dem Quadrate des Perpendikels und dem Quadrate der über diesen Segmenten gelegenen Seite gleich sey.

$$BD^2 = AB^2 - AD^2$$
$$BD^2 = BC^2 - DC^2$$

A.

Geometrische Flächenproportionen.

Fig. 37.

Ein Parallelogramm ist durch eine Diagonallinie in zwei Dreiecke getheilt. Ziehe ich in irgend einen Punkt der Diagonallinie eine mit einer Seite parallel laufende Linie, wie FE und EH, so sind diese Proportionallinien der Dreiecke, welche durch die Diagonallinie entstanden sind. FE ist proportional von ABD, und EH von BCD. Nun stehen die Proportionallinien der Dreiecke in gleichem Verhältnisse und bilden ähnliche Dreiecke; die Parallelogramme FEHD und IEBG sind von Dreiecken aus den Proportionallinien, sammt den abgeschnittenen Theilen der Seiten zusammengesetzt; also EHD + FED = FEDH und IEB + BGE gleich IEBG. Da diese Dreiecke den beiden durch die Diagonallinie entstandenen Dreiecken ähnlich sind, so müssen auch die aus ihnen gebildeten Parallelogramme BIEG und FEDH dem größern Parallelogramme ADBC ähnlich seyn. Es geht also daraus hervor:

Die Parallelogramme um die Diagonallinie sind ähnlich dem größern Parallelogramme.

Suche ich die Proportionen in diesem Parallelogramme auf, so leuchtet hervor, daß

EF : EH = EG : GB. EF : EH = BA : AD. Das Rechteck EFIA ist aus EF × AF, und EHGC ist aus EH × HC. Weiter das Dreieck BCD ist gleich BAD. Das erste Dreieck besteht aus den Dreiecken BEI und EFD und aus dem Parallelogramme IEFA. Das Dreieck BCD besteht aus den beiden Dreiecken BGE + EHD und dem Rechtecke EGHC. Da die Dreiecke BIE und BGE, EFD und EHD aus der Diagonallinie und den Seiten der Parallelogramme bestehen, so sind sie einander gleich. Wenn ich also dem Dreiecke BAD die beiden Dreiecke BIE und EFD, und dem Dreiecke BCD die Dreiecke BGE und EHD nehme, so nehme ich jenen beiden gleichen Dreiecken BAD und BCD gleiche Theile weg. Wenn ich gleiche Theile von einerlei Ganzen nehme, so müssen natürlich auch gleiche Reste bleiben. Diese Reste sind aber die Rechtecke IEFA und EGHC, die sich also auch gleich verhalten müssen. Diese Rechtecke sind Complemente des Parallelogramms.

Complemente der Parallelogramme verhalten sich gleich.

a) Wenn ich das Complement AFIE zu dem proportionirten Parallelogramme IEBG setze, so entsteht das Parallelogramm BAFG. Wenn ich das andere Complement GEHC demselben Parallelogramme zugeselle, so entsteht ACB; da nun die beiden Complemente sich gleich verhalten, so wird auch einerlei Größe entstehen, wenn ich ein oder das andere Complement demselben Parallelogramme beigeselle. Also muß das Parallelogramm ABFG gleich seyn dem IHCB.

b) Eben so muß es sich auch verhalten, wenn ich ein Complement zu dem andern ähnlichen Parallelogramme FDEH setze; also

IADH = GFDC

$$BAD = BCD$$

$$\triangle BAD = \triangle BIE + EFD + \square AFIE$$
$$BCD = BGE + EHD + GEHC$$
$$BIE = BGE, \; EFD = EHD$$

Daher ist auch

$$BIE + BGE + AFIE = BGE + EHD + GEHC$$
$$- BIE + EFD \text{ Rest } AFIE, \; - BGE + EHD \text{ Rest } GEHC$$

$$AFIE = GEHC$$

Fig. 38.

Vier Proportionallinien AB und AE und EF und BC sind gegeben. Ich finde, daß $AB \frac{2}{3} AE$ ist, folglich wird auch $EF = \frac{2}{3} EB$ seyn. Aus diesen Proportionallinien bilde ich Rechtecke, und nehme AB zur Höhe, BC zur Grundlinie des einen, und AE zur Höhe und EF zur Grundlinie des andern Rechtecks. In diesen beiden Rechtecken müssen Grundlinie und Höhe in gleichem Verhältnisse stehen, und wenn die Länge und Breite verschiedener Rechtecke in gleichem Verhältnisse stehen, so müssen sich dieselben ähnlich seyn.

Es bilden daher Linien, die in gleichem Verhältniß stehen, ähnliche Rechtecke.

Die Proportionallinie EF ist doppelt so groß genommen als AB, folglich muß auch BC doppelt so groß seyn, als AE. Wenn $AB = 2$, so muß $EF = 4$, und wenn $AE = 3$, so muß $BC = 6$ seyn. Verbinde ich die ungleichnamigen Glieder mit einander, so erhalte ich dadurch das Rechteck BCAD Fig. ∞, welches in seiner Grundlinie 6 und in der Höhe 2 hat. Denke ich mir die Rechtecke, wie oben, aus Quadraten entstanden, so liegen zwei mal 6 Quadrate übereinander. Nun bilde ich auch aus den beiden mittlern Gliedern Recht-

ecke, dann kommen 4 gleiche Theile neben, und 3 gleiche Theile über einander, und es entsteht das Rechteck AEFG, denn der Höhe AB des ersten Rechtecks fehlt noch die Hälfte BE ihrer selbst um der Höhe AE des zweiten gleich zu seyn. Dagegen fehlt der Länge AG des zweiten Rechtecks GD, d. i. ein halb ihrer selbst, um der des zweiten AD gleich zu seyn. Mithin erhält das zweite Rechteck AEFG das in der Höhe, was das erste in der Länge mehr hat, und umgekehrt enthält das erste Rechteck in der Länge, was das zweite in der Höhe mehr hat. Der Inhalt des ersten Rechtecks ist zwei mal 6 = 12. In der Länge des zweiten Parallelogramms AEFG liegt ein Drittel weniger ($\frac{1}{3}$ weniger als 6), also nur 4 Quadrate neben, aber 3 über einander. Da die Höhe des ersten Rechtecks 2, die Länge 6, d. i. zwei mehr als 4 beträgt, so liegen 2 × 2 Rechtecke in dem Mehr der Länge GLCD; und da die Länge von AGFE vier, die Höhe aber 3 beträgt, so liegen über BL noch 4 Quadrate mehr, folglich gerade eben so viel, als die Summe, die in dem Mehr der Länge GLCD enthalten ist. Beide Rechtecke AEFG nnd ABCD sind also einander gleich. Der Inhalt des erstern ist 2 × 6 = 12. Die Differenz der Länge des erstern ist 2 × 2. Die Differenz der Höhe des letztern ist 1 × 4 (das Mehr der Höhe mit dem Rest der Länge).

Wenn diese beiden Rechtecke, wie Fig. 39, in einander gezeichnet sind, so bleibt von dem Rechtecke AEFG das Mehr der Höhe BEFL noch übrig. Nun ist das Mehr der Höhe EB ein halb mal AB, d. i. der Höhe des Rechtecks BD, und das Mehr der Länge GD = $\frac{1}{2}$ AG, d. i. der Höhe des Rechtecks AF; so wie sich also die Linien EA zu AD oder BA zu AG verhalten, so würden sich auch die Differenzen EB und LC verhalten. Wenn ich daher aus denselben, also aus FL × LC, ein

Rechteck mache, so ist dieß ähnlich BALG und dem EA $\times$ AD.

Aus welchen Proportionallinien sind die Rechtecke alle entstanden?

AEID aus AE $\times$ BC
BLAG aus AB $\times$ EF
FLIC = BE $\times$ LC
ABCD = AB $\times$ BC
AEFG = AE $\times$ EF
GLCD = AB $\times$ LC
BEFL = BE $\times$ EF

Da AEFD $\sim$ BLAG $\sim$ FLIC, so ist AE $\times$ BC $\sim$ AB $\times$ EF $\sim$ BE $\times$ LC.

Da ABCD = AELG, so ist AB $\times$ BC = AE $\times$ EF.

Da GFCD = BEFL, so ist AB $\times$ FC = BE $\times$ EF.

Denke man sich ein anderes Längenverhältniß. Sey z. B. die Länge der einen Grundlinie 3, die andere 4, die dritte 6, so muß die vierte 8 seyn. Die ersten beiden Glieder dieser Längen zum Rechtecke erhoben, geben Rechtecke aus 3 $\times$ 4. Das Höhenverhältniß ist das nämliche, mithin würden auch diese Rechtecke einander ähnlich seyn. Denke man sich aber dieß Rechteck aus den ungleichnamigen Gliedern 3 $\times$ 8, dann liegen 3 $\times$ 8 Quadrate über einander, und die ganze Fläche ist ein Rechteck aus den äußern Gliedern einer Proportion. Verbinde ich nun die beiden mittlern Längen, also 4 und 6, auch zu Rechtecken, so hat das zweite Rechteck nur $\frac{6}{8}$, das sind $\frac{3}{4}$ der Länge des ersten. Dagegen hat das erste Rechteck auch

nur ½ der Höhe des zweiten. Anstatt daß in dem ersten Rechteck nur drei Quadrate über einander liegen, so liegt hier über jedem noch eins. Die Grundlinie des ersten Rechtecks ist 6, die Höhe ist eins mehr, folglich liegen noch 6 Quadrate mehr in der Höhe. Dafür hat aber die Länge des erstern Rechtecks $2 \times 3 = 6$ Quadrate über einander; hinwiederum hat das Rechteck aus den mittlern Gliedern gerade in der Höhe so viel mehr, als das aus den äußern Gliedern in der Länge hat. Die Differenz der Länge beider Rechtecke ist die Differenz zwischen 6 und 8, das ist 2. Die Differenz zwischen Höhe und Breite ist zwischen 3 und 4, das ist 1. Erhebe ich diese Differenz zum Rechtecke, so verhält sich die Höhe desselben zur Länge, wie 1 zu 2. Eben so verhält sich aber auch das Rechteck aus den gleichnamigen Gliedern 3 und 6, und aus 4 und 8. Es ist daher das Rechteck aus der Differenz ähnlich dem Rechtecke aus den gleichnamigen Gliedern der Proportionen oder aus den Theilen und aus dem Ganzen.

Beiden Rechtecken aus den äußern und aus den mittlern Gliedern ist das Rechteck aus den beiden kleinsten Gliedern, das ist hier 3×4, der Proportion gemeinschaftlich. Es darf also nur der Unterschied der Länge mit dem der Höhe, oder der Unterschied der Höhe mit dem der Länge multiplicirt und dem Rechtecke angesetzt werden, so entstehen die Rechtecke aus den ungleichnamigen Gliedern der Proportion. Der Unterschied zwischen der Länge 6 und $8 = 2$. Die Höhe ist 3, also $3 \times 2 = 6$. Der Unterschied der Höhe ist eins, der Länge 6, $6 \times 1 = 6$. Da das Rechteck aus der Höhe und Differenz der Länge, und aus der Länge und Differenz der Höhe die Rechtecke der ungleichnamigen Glieder fällt, so heißen diese beiden ausfüllenden Rechtecke **Complemente** der Rechtecke.

Einige Längen-Proportionen:

$$4 : 9 = 8 : 18$$

Rechtecke $4 \times 18 = 72$
$9 \times 8 = 72$

$\square\, 4 \times 18 = \square\, 9 \times 8$

Differenz 8 und 18 = 10
Differenz $9 - 4 = 5$

Complemente $4 \times 10 = 40$
und $8 \times 5 = 40$

Comp. $\square\, 4 \times 10 = \square\, 8 \times 5$

Ferner $6 : 5 = 18 : 15$

Rechtecke $6 \times 15 = 90$
$5 \times 18 = 90$

$\square\, 6 \times 15 = \square\, 5 \times 18$

Differenz zwischen 18 und 15 = 3
— zwischen 5 und 6 = 1

Complemente $3 \times 5 = 15$
$1 \times 15 = 15$

Comp. $\square\, 1 \times 15 = 3 \times 5$

Da in allen geometrischen Proportionen immer das erste Glied ein solcher Theil des zweiten ist, als das dritte von dem vierten, so muß auch von allen dasselbe gelten.

Es ist daher

1) das Rechteck aus den beiden äußern Gliedern von vier Proportionalli-

nien gleich dem Rechteck aus den beiden mittlern Gliedern.

2) Wenn die Rechtecke aus den äußern und mittlern in einander beschrieben werden, so entstehen Complemente.

3) Diese Complemente der Parallelogramme verhalten sich gleich.

Folgesätze.

1) Wenn sich in einem Cirkel zwei Sehnen durchschneiden, so stehen die Theile der verschiedenen Sehnen in gleichem Verhältniß (III, Fig. 58 S. 111 EC : EB = AE : ED). Die äußern und mittlern Glieder sind aber hier die Theile einer und derselben Sehne.

Wenn sich also zwei Sehnen eines Cirkels, in welchem Punkt es sey, schneiden, so sind die Rechtecke aus den abgeschnittenen Theilen einander gleich.

$$EC \times ED = EB \times AE.$$

2) Wenn drei Proportionallinien vorhanden sind, so ist das Produkt aus den mittlern Gliedern das Produkt einer und derselben Linie. Dieß ist ein Quadrat. Das Produkt der mittlern Proportionallinie ist daher auch gleich den Produkten aus den beiden äußern Gliedern (III, Fig. 39 p. 97).

III. Fig. 39.

Von dreien Linien, die in einer continuirlichen Proportion stehen, erhebe ich die beiden ersten zu Quadraten. Die Länge der ersten Linie denke ich mir als 9, die der zweiten als 6, und die der dritten als 4. Das Quadrat der ersten wäre demnach 81, das der zweiten 36. Da 6 ein Drittel weniger ist als 9, so muß auch 6×6 ein Drittel weniger seyn als 6×9; $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, d. i. gerade das erste Glied; denn dies enthält ja eben

so viel Theile des zweiten Gliedes, als dieses von dem ersten enthält. Nun ist aber 9 $2\frac{1}{4}$ mal vier, folglich auch 9×9 gleich $2\frac{1}{4} \times 4 \times 9$. Man sieht also, daß das Quadrat des ersten Gliedes so viel mal das des zweiten enthält, als die simple erste Linie die dritte enthält. Denke man sich die Proportion anders: $2 : 4 = 4 : 8$. Da $2 = \frac{1}{2} \times 4$, so ist auch $2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2$; $4 \times 2 = \frac{1}{2} 4 \times 4$, folglich ist $2 \times 2 = \frac{1}{4} \times 4 \times 4$. Eben so ist auch $2 = \frac{1}{2} \times 4$, dieß aber wieder $\frac{1}{2} \times 8$; folglich ist 2 auch $\frac{1}{4} \times 8$. Es enthält also das Quadrat des ersten Gliedes so viel aliquote gleiche Theile des Quadrats des zweiten, als das simple erste Glied von dem dritten enthält. Dieß muß bei allen continuirlichen Proportionen der Fall seyn.

Von drei Proportionallinien verhält sich also das Quadrat der ersten zum Quadrat der zweiten, wie sich die simple erste Linie zur dritten verhält.

Auf diese Weise kann ich die Länge der dritten Proportionallinie aus den beiden erstern finden. Ich quadrire nämlich beide Linien; so wie sich dann das Quadrat der erstern zum Quadrat der zweiten Linie verhält, so verhält sich die erste Linie zur vierten. Ich suche also, wie viel aliquote Theile das Quadrat der zweiten Proportionallinie von dem Quadrat der erstern enthält, so viel aliquote Theile der ersten Linie gebe ich dann der dritten. Gesetzt die beiden ersten Linien wären $5 : 8$. Die dritte Linie wüßte ich noch nicht. Nach dem Vorhergehenden quadrire ich beide Linien also: $5 \times 5 = 25$ und $8 \times 8 = 64$. Da $64 =$ ist $2\frac{14}{25} \times 25$, so muß auch die dritte Linie $2\frac{14}{25}$ mal so lang seyn als die erste. Es ist daher die dritte Proportionallinie $2\frac{14}{25} \times 5$, d. i. $12\frac{4}{5}$. Die Proportionallinien wären so nach $5 : 8 = 8 : 12\frac{4}{5}$.

3) Wenn man in einer Cirkelperipherie auf irgend einen Punkt des Diameters einen Perpendikel fällt, so ist dieser die mittlere Proportionallinie zu den abgeschnittenen Theilen des Diameters. Es ist daher auch das Quadrat dieses Perpendikels oder das Quadrat des Sinus gleich dem Rechtecke aus den von ihm abgeschnittenen Theilen des Diameters. III, Fig. 56.

$$DC^2 = DC \times AD.$$

4) Wenn man eine gegebene Linie in das mittlere und äußere Verhältniß theilt, so ist das Quadrat des größern Theils dem Rechtecke aus den beiden kleinern Theilen und der ganzen Linie gleich. III. Anhang, Fig. 17.

$$AD \times AB = DB^2.$$

5) Die Ordinate ist allezeit die mittlere Proportionallinie zu ihrer Abscisse und dem Parameter; es ist daher auch das Quadrat der Ordinate einer Parabel gleich dem Rechtecke aus der Abscisse und dem Parameter. III, 63.

$$CX^2 = GH \times CE.$$

Fig. 40.

Die Krümmung einer Ellipsis ist so, daß die Ordinate (wie FH) allezeit die vierte Proportionallinie zu dem correspondirenden Sinus FG der halben kleinen Achse ED und der halben großen Achse EA ist. Es verhält sich also allezeit die Ordinate zu dem correspondirenden Sinus, wie sich die kleine Achse zur großen verhält.

Wenn ich daher die Ordinate FH, den Sinus FG, die halbe Achse ED und den Radius EM zu Quadraten erhebe, so ist die Wurzel des

Quadrats FG um denselben aliquoten Theil der Ordinate FH größer, um welchen Theil der halben kleinen Achse ED die Wurzel des Quadrats aus dem Radius EM größer ist. Setze man die Ordinate $FH = 5$, den Sinus $FG = 6$, die halbe kleine Achse $ED = 10$, so ist der Radius $EM = 12$. Sind dieß Wurzeln von Quadraten, so werden natürlich auch die Größen derselben auch im Verhältniß bleiben. Das Quadrat des Sinus wird nämlich um eben so viel aliquote Flächen-Theile der Ordinate FH größer seyn, als das Quadrat des Radius Flächen-Theile der kleinern Achse ED größer ist. Setzen wir es nach der vorherigen Annahme auf Zahlen, so ist das Quadrat $FH = 5^2 = 25$, das des Sinus $= 6^2 = 36$, $ED^2 = 10^2$, das ist 100 und $EM = 12^2$, das ist 144; $36 = \frac{11}{25}$ mehr als 25; $144 = \frac{44}{100}$ mehr als 100; $\frac{44}{100}$ sind aber ebenfalls $\frac{11}{25}$. Es erhellt daraus also, daß das Quadrat der Ordinate sich zum Quadrate des correspondirenden Sinus verhalte, wie sich das Quadrat der halben kleinen Achse zum Quadrat des correspondirenden Radius verhält.

Der Radius EM ist aber gleich EA, denn es ist der Radius desselben Bogens, aber auch zugleich die halbe große Achse; folglich ist auch das Quadrat EM gleich dem Quadrate EA. Daher verhält sich das Quadrat der Ordinate zu dem Quadrate des correspondirenden Sinus, wie sich das Quadrat der halben kleinen Achse zum Quadrat der halben großen Achse verhält.

So wie sich die Halben verhalten, so verhalten sich auch die Ganzen; wenn ich daher das Quadrat der ganzen kleinen Achse CD nehme, so ist dies in Zahlen vier mal $100 = 400$, und das

der ganzen großen Achse 4 × 144 = 576, das sind $\frac{176}{400}$ mehr als das Quadrat der kleinen Achse, $\frac{176}{400}$ sind aber ebenfalls $\frac{11}{25}$.

Es verhält sich daher das Quadrat der Ordinate zu dem Quadrat des correspondirenden Sinus, wie sich das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der großen Achse verhält.

Endlich ist das Quadrat des Sinus (FG) gleich dem Rechtecke aus den von ihm abgeschnittenen Theilen des Diameters, d. i. hier FA × FB. Dieser Diameter ist aber zu gleicher Zeit die große Achse der Ellipsis. Mithin kann ich überall anstatt dem Quadrate des Sinus FG das Rechteck aus den von ihm oder vielmehr der correspondirenden Ordinate FH abgeschnittenen Theilen der großen Achse setzen. So wie sich die Größe des Quadrats der Ordinate FH zur Größe des Quadrats des correspondirenden Sinus verhält, eben so muß es sich auch zur gleichen Größe des Rechtecks FA × FB verhalten. Aus allen diesen geht also folgender Satz hervor:

Das Quadrat der Ordinate zu der großen Achse verhält sich zu dem Rechtecke aus den von ihr abgeschnittenen Theilen, wie sich das Quadrat der kleinen Achse zu dem Quadrate der großen Achse verhält.

$$FH : FG = ED : EM$$

$$FH^2 : FG^2 = ED^2 : EM^2$$

$$EM^2 = EA^2$$

$$FH^2 : FG^2 = ED^2 : EA^2$$

$$\frac{\begin{array}{c} ED^2 : EA^2 = CD^2 : AB^2 \end{array}}{\begin{array}{c} FH^2 : FG^2 = CD^2 : AB^2 \\ FG^2 = FA \times FB \end{array}}$$

$$\overline{FH^2 : FA \times FB = CD^2 : AB^2}$$

Folgesätze.

1) Da alle Ordinaten FH, IL vierte Proportionallinien zu dem Sinus der kleinen und großen Achse sind, so muß auch von allen dasselbe gelten. Es verhält sich daher auch das Quadrat einer jeden Ordinate zu dem Quadrate des correspondirenden Sinus, wie sich das Quadrat der andern Ordinate zu dem Quadrat ihres correspondirenden Sinus verhält; also $FH^2 : FG^2 = IL^2 : IK^2$. Da nun die Rechtecke aus den von den Ordinaten abgeschnittenen Theilen der großen Achse gleich sind den Quadraten des diesen Ordinaten correspondirenden Sinus, so müssen sich auch

die Quadrate der Ordinaten so zu einander verhalten, als die Rechtecke aus den von ihnen abgeschnittenen Theilen der großen Achse.

$$\begin{array}{c} FH^2 : FG^2 = IL^2 : IK^2 \\ FG^2 = FA \times FB \\ IL^2 = IA \times IB \end{array}$$

$$\overline{FH^2 : FA \times FB = IL^2 = IA \times IB}$$

oder

$$FH^2 : IL^2 = FA \times FB : IA \times IB.$$

Fig. 41.

2) Wenn ich die kleinere Achse CD zum Diameter eines Kreises mache, so ist umgekehrt der Sinus IG des Kreises die kleinste Proportionallinie zu der correspondirenden Ordinate IH, dem

Diameter CD, das ist der kleinen Achse und der großen Achse. Es verhält sich daher das Quadrat des Sinus zu dem Quadrate der Ordinate der kleinen Achse, wie sich das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Achse verhält.

Das Quadrat des Sinus ist gleich dem Rechteck aus den abgeschnittenen Theilen des Diameters CD. Dieser Diameter ist hier aber die kleine Achse; mithin kann das Rechteck aus den von der dem Sinus correspondirenden Ordinate abgeschnittenen Theilen, d. i. $ID \times IC$, als gleiche Größe anstatt des Quadrats des Sinus gesetzt werden.

Es verhält sich daher das Quadrat der Ordinate der kleinen Achse zu dem Rechteck aus den von ihr abgeschnittenen Theilen, wie sich das Quadrat der großen zum Quadrate der kleinen Achse verhält.

$$IH : IG = AE : ED$$
$$IH^2 : IG^2 = AE^2 : ED^2$$
$$AE^2 : ED^2 = AB^2 : CD^2$$

$$IH^2 : IG^2 = AB^2 : CD^2$$
$$IG^2 = ID \times IC$$

$$IH^2 : ID \times IC = AB^2 : CD^2.$$

3) Der Parameter (GH) ist die dritte Proportionallinie zu den beiden conjugirten Achsen der Ellipse. Nun verhält sich aber das Quadrat der ersten Proportionallinie zum Quadrat der mittlern, wie sich die erste Linie zur dritten verhält. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich zu den Rechtecken aus den von ihnen abgeschnittenen Theilen der Achse eben so, als sich die Quadrate der conjugirten Achsen verhalten. Daher

verhalten sich die Quadrate der Ordinaten der großen Achse zu den Rechtecken aus den von ihnen abgeschnittenen Theilen, wie sich der Parameter zur großen Achse verhält, und umgekehrt, die Quadrate der Ordinaten der kleinen Achse zu den Rechtecken aus den von ihnen abgeschnittenen Theilen, wie sich die große Achse zum Parameter verhält.

GH ist der Parameter.

$$AB : CD = CD : GH$$

$$AB^2 : CD^2 = AB : GH$$

Fig. 42.

4) In einer Ellipsis AIFDR suche ich zuerst die beiden Achsen AB und QR. Dann ziehe ich von einem beliebig angenommenen Punkte C aus einen Diameter CD; von demselben Punkte C aus lege ich eine Ordinate CK in die große Achse AB. Nun betrachte ich den Theil der großen Achse von dem Mittelpunkt G aus bis zum Berührungspunkte K der Ordinate, also GK als erstes, und die halbe große Achse GA als mittleres Glied von drei Proportionallinien, zu denen die dritte noch fehlt. Ich suche diese und setze sie ebenfalls an die große Achse an, so daß diese bis O verlängert wird. Es verhält sich nun GK zu GA, wie GA zu GO. Daher ist GA^2 gleich $GK \times GO$. Wenn ich dem Quadrat GA das Quadrat GK nehme, so bleibt an der obersten Seite noch übrig das Rechteck aus $KA \times GA$, und auf der rechten das Rechteck aus $KA \times KG$. Denn

$$GA^2 = GK^2 + 2GK \times KA + KA^2$$

$$GK \times KA + KA^2 = GA \times KA$$

$$GA^2 - GK^2 = GA \times KA + GK \times KA$$

oder

oder das Quadrat der halben großen Achse weniger dem Quadrate des Theils bis zu der von dem Diameter gezogenen Ordinate CK ist gleich dem Rechtecke aus der Abscisse KA und der halben großen Achse, sammt dem Rechtecke aus dem Theile GK, zwischen dem Mittelpunkt der Ordinate und derselben Abscisse. Nun ist das Rechteck aus $KA \times KB$ ebenfalls aus der Abscisse, der halben großen Achse GB und demselben Stück GK, folglich ist es gleich den beiden Rechtecken $GA \times KA + GK \times KA$, d. i. dem Reste des Quadrats der halben Achse, wenn man das Quadrat des Theils GK abzieht.

Folglich ist

Das Quadrat der halben großen Achse gleich dem Rechtecke aus den von einer Ordinate (z. B. CK) abgeschnittenen Theilen der ganzen Achse, sammt dem Quadrat des Stücks zwischen dem Mittelpunkt G und derselben Ordinate.

$$GA^2 = GK^2 + KA \times AG + KA \times GK$$
$$KA \times AG + KA \times KG = KA \times KB$$

$$GA^2 = GK^2 + KA \times KB.$$

5) Wenn ich von dem Punkte O aus eine Tangente OC, und mit dieser parallel einen Diameter EF lege, so ist dieser dem Diameter CD conjugirt. Lege ich nun auch aus E die Ordinate EP, so entstehen ähnliche Dreiecke CKO und EPG, deren Seiten in gleichem Verhältnisse stehen. Es verhält sich daher auch CK^2 zu KO^2, wie sich PE^2 zu PG^2 verhält; und, wenn man die gleichnamigen Glieder vertauscht, CK^2 zu PE^2, wie KO^2 zu PG^2.

Es verhalten sich aber die Quadrate der Ordinaten, wie sich die Rechtecke aus den von ihnen abgeschnittenen Theilen der großen Achse verhalten. $CK^2 : PE^2 : AK \times KB : AP \times PB$. Da nun auch die Quadrate von KO und dem Stück PG in demselben Verhältnisse stehen, als die Quadrate der Ordinaten, so müssen auch die Quadrate dieser Theile in demselben Verhältnisse stehen, als die Rechtecke aus den von den beiden Ordinaten abgeschnittenen Theilen der großen Achse.

$$CK : PE = KO : PG$$

$$\overline{CK^2 : PE^2 = KO^2 : PG^2}$$

$$CK^2 : PE^2 = KA \times KB : PA \times PB$$

$$\overline{KO^2 : PG^2 = KA \times KB : PA \times PB}$$

Also

das Quadrat des Theils der verlängerten Achse, welcher zwischen der von einem Diameter aus gezogenen Ordinate und der an den Endpunkt des Diameters gelegten Tangente liegt, verhält sich zu dem Quadrate des Theils der halben großen Achse, welcher zwischen dem Mittelpunkt und der von der conjugirten Achse aus gezogenen Ordinate liegt, wie sich die Rechtecke aus den von diesen beiden Ordinaten abgeschnittenen Theilen der großen Achse verhalten.

6) Das Quadrat der halben Achse GA ist gleich dem Rechtecke aus den Theilen $GK \times GO$. Wenn ich dem letztgenannten Rechtecke noch das

Quadrat des Theils GK nehme, so bleibt übrig das Rechteck $GK \times KO$. Von dem Quadrate GA bleibt aber, nach Abzug desselben Rechtecks, noch $KA \times KB$. Da nun von zwei gleichen Größen ein und dasselbe Quadrat abgezogen wird, so müssen die Reste sich gleich verhalten, folglich ist $KG \times KO = KA \times KB$. Wenn also zwei conjugirte Diameter vorhanden sind, so ist das Rechteck aus den durch die Ordinate CK abgeschnittenen Theilen der bis zur Tangente OC verlängerten halben großen Achse gleich dem Rechtecke aus den durch dieselbe Ordinate abgeschnittenen Theilen der großen Achse.

$$GA^2 = KG \times GO$$
$$GA^2 - KG^2 = KA \times KB$$
$$KG \times GO - KG^2 = KG \times KO$$
$$\overline{}$$
$$KG \times KO = KA \times KB$$

7) Der Unterschied zwischen dem Quadrate PG und dem GA^2 ist das doppelte Rechteck $PA \times PG + PA^2$. Ein $PA \times PG + PA^2$ gleich $PA \times AG$ oder $PA \times GB$. Setze ich dazu noch das zweite Rechteck $PA \times PG$, so erhalte ich das Rechteck $PA \times PB$. Dieses ist also die Differenz zwischen dem Quadrat PG und dem Quadrat der halben großen Achse.

Hyperbel.

Fig. 43.

Eine Hyperbel entsteht, wenn man den Kegel an der Seite mit dem Perpendikel aus dessen Spitze parallel durchschneidet. Die krumme Linie, die an der Seite des Kegels dann fortgeht, erwei-

tert sich nach der Grundfläche des Kegels hin. Denke ich mir nun den Kegel als eine Menge von Cirkelscheiben, die immer kleiner werden, so werden auch die Diameter und folglich die Ordinaten der Hyperbel in derselben Proportion kleiner, je mehr sie sich der Spitze des Kegels nähern. Die Art der Krümmung einer Hyperbel ist daher durch folgende Regel bestimmt: Man ziehet zwei ungleiche Linien AB und CD, die sich in ihren Mittelpunkten durchschneiden. Man errichtet dann auf dem äußersten Punkt der ersten, also auf A, einen Perpendikel AE. Man verlängert AB gegen S und Y. Man nimmt dann auf AS eine Anzahl gleicher Theile, als wie AK und KL, um aus O die Kreise REK und XFL u. s. f. zu beschreiben. Zu diesen Linien AB, CD und AE sucht man endlich eine vierte Proportionallinie KN, und errichtet diese auf den Punkt K. Eben so sucht man zu AB, CD und AF eine vierte Proportionallinie LM, und errichtet diese perpendikular auf den Punkt L, so fährt man fort. Diejenige krumme Linie, welche man durch alle diese aus BO errichtete vierte Proportionallinien ziehen kann, ist eine **hyperbolische Linie**.

1) Da sich die beiden conjugirten Achsen zu einander verhalten, als die Linien AE und KN, und AF und LP, so müssen auch die Quadrate dieser Linien in demselben Verhältnisse stehen; folglich verhält sich $AB^2 : ED^2 = AE^2 : KN^2$. AE^2 ist aber gleich $AK \times KR$; denn AE ist die mittlere Proportionallinie zu den beiden Theilen AK und AB der Linie KR; folglich auch $AK \times KB$, da AR gleich KB ist.

Es verhält sich in einer Hyperbel

das Quadrat der Ordinate zu dem Rechteck aus den Theilen AK und KB

der verlängerten Achse, wie sich das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Achse verhält.

2) Wie sich die Quadrate der ganzen, so müssen sich auch die Quadrate der halben Linien verhalten; also $OD^2 : OA^2 = LD^2 : AB^2$. Da sich nun KN^2 zu $KA \times KB$ eben so verhält, so muß auch dasselbe Verhältniß bleiben, wenn die gleichnamigen Glieder addirt werden; also $OD^2 + KN^2$ zu $OA + KA \times KB = CD^2 : AB^2$. Nun ist aber $TO^2 = VK^2$; folglich auch KN^2. Ich kann also anstatt KN^2 setzen das Quadrat des durch TV begrenzten Stücks TO der kleinen Achse. Dann steht die Proportion so: $OD^2 + TO^2$ zu $OA^2 + KA \times KB = CD^2 : AB^2$; ferner ist das Rechteck $KA \times KB$ gleich $AK \times AB$, um dieses ist das Quadrat KO gerade größer, als OA^2. Daher ist KO^2 gleich $AO^2 + KA \times KB$, und da OK^2 gleich ist TU^2, so ist auch das letztere denselben Größen $OA^2 + KA \times KB$ gleich. Daher kann ich anstatt dieser beiden Größen das Quadrat der Ordinate TU zur kleinen Achse in die Proportion bringen. Dann steht sie

$$OD^2 + TO^2 : TU^2 = CD^2 : AB^2, \text{ oder}$$

$$TU^2 : OD + TO = AB^2 : DE^2, \text{ d. i.}$$

das Quadrat der Ordinate zur kleinen Achse verhält sich zu den beiden Quadraten der halben kleinen Achse, sammt dem Quadrate des durch sie begrenzten Stücks derselben (TO), wie sich das Quadrat der großen zum Quadrat der kleinen Achse verhält.

Fig. 44.

3) Ich ziehe eine gerade Linie HI, welche mit der Tangente FG parallel läuft, und mit ihren Endpunkten beide Assymptoten berührt. Dadurch entstehen die ähnlichen Dreyecke CPH und CBF. Es verhält sich daher das Quadrat CB zu dem Quadrat FB, wie CP^2 zu PH^2. Das Quadrat CP ist um das Rechteck aus $BP \times PA$ größer als BC.

Anmerkung. Assymptoten entstehen, wenn man durch den äußersten Punkt B der großen Achse eine Tangente legt (wie FG), welche die Scheitel der Hyperbel berührt, diese Tangente der kleinen Achse gleich macht, durch den Mittelpunkt der beiden conjugirten Achsen zwei Linien, die sich durchkreuzen, so legt, daß sie die Endpunkte der Tangente berühren, und nun diese Linien nach Gefallen verlängert.

Das Quadrat PH ist dagegen um das Rechteck $HK \times KI$ größer als HK^2. Ich betrachte daher BC^2 und $BP \times PA$ als Theile des Ganzen PC und $KP^2 + HK \times KI$ als Theile des proportionirten Ganzen HP^2. Nun weiß ich, daß das Rechteck $BP \times PA$ sich zum Quadrat KP verhält, wie sich das Quadrat der halben großen zum Quadrat der halben kleinen Achse verhält, folglich auch zum Quadrat der halben Tangente FB^2. Da sich nun die Ganzen so verhalten, und auch die Theile derselben Ganzen in eben dem Verhältnisse stehen, als die Quadrate der halben Ordinaten, so wird dasselbe auch von den beiden andern Theilen BC^2 und $HK \times KI$ gelten. Also auch diese müssen sich verhalten, wie die Quadrate der halben Ordinaten. Die Proportion wäre nun $BC^2 : HK \times KI = BC^2 : BF^2$. Nun ist aber BC Quadrat sich selbst gleich, $HK \times HI$ steht in demselben Verhältnisse mit ihr, wie BF; folg-

sich muß HK $\times$ KI gleich seyn BF^2 oder auch DC^2.

Wenn man daher in eine Hyperbel eine Linie mit der kleinen Achse parallel legt, so daß ihre Endpunkte die Asymptote erreichen, so ist das Rechteck aus den durch die parabolische Linie abgeschnittenen Theilen (KH $\times$ KE, QL $\times$ LR) dieser Linie gleich dem Quadrat der halben kleinen Achse.

$$PC^2 - BP \times PA.$$

$$CP^2 : HP^2 = CB^2 : BF^2$$

$$BP \times PA : KP^2 = CB^2 : BF^2$$

Nun ist

$$CP^2 = BP \times PF + CB^2$$
$$HP^2 - HK \times KI + KP^2$$

$$CP^2 - BP \times PF = CB^2$$
$$HP^2 - KP^2 = HK \times KI$$

$$CB^2 : FB^2 = CB^2 : HK \times KI$$
$$FB^2 = CD^2$$

$$CD^2 = HK \times KI.$$

4) Da dieß mit allen der kleinen Achse einer Hyperbel parallelen Linien der Fall ist, so muß auch SO $\times$ OT = KF $\times$ KI, denn beide sind dem Quadrate der halben kleinen Achse gleich. Daher muß ich auch OS zu HK verhalten, wie sich OT zu KI verhält, und HK zu QL, wie LR zu KI. Weil die Produkte der äußern und mittlern Glieder gleich sind.

Es stehen demnach die zwischen der parabolisch gekrümmten Linie und der Assymptote liegenden Theile der Parallellinien in wechselseitiger Proportion.

5) Diesem zu Folge verhält sich OS : KH gleich OX : KY und KI : OT = KZ : OU. Nun ist OS : KH = KI : OT. Daher muß auch OX : KY = KZ : OV; folglich ist OX × OV = KY × KZ.

oder

Wenn man durch zwei beliebige Punkte zweier entgegenstehender Hyperbeln zwei gerade Linien mit einander parallel zieht, so daß sie sich an den Assymptoten endigen, so sind die Rechtecke aus den durch die parabolische Linie geschnittenen Theilen dieser Parallellinien einander gleich.

Fig. 45.

6) Ich ziehe durch zwei beliebige Punkte einer Hyperbel die geraden Linien AB und CD mit einander parallel. Eben so lege ich zwischen die Assymptote und die hyperbolisch gekrümmte Linie die geraden AE und GF einander parallel. Dadurch erhalte ich die ähnlichen Dreiecke GEA, ICF und DCK, BAH. Es müssen daher die Linien GH zu IC = EA : FC und CK : AH = CH : AB sich verhalten. Nun verhalten sich aber, nach dem vorigen, GA : CK = IC : AH. Daher müssen sich auch die andern Linien der verschiedenen Dreiecke eben so verhalten, EA : CK, wie FC : AB,

oder EA : FC = CD : AB. Daraus folgt, daß EA × AB auch gleich seyn müsse FC × CD.

oder

die Rechtecke aus den Parallellinien, die zwischen den Assymptoten und der Hyperbel liegen, verhalten sich gleich.

7) Ziehe ich nun zwei mit der Assymptote parallel laufende Linien AP und CO, so bilden diese hinwiederum mit den Linien AH und CK ähnliche Dreiecke. Es verhält sich also AP : AH = CO : CK. Nun verhält sich aber auch EA : CK = FC : AH; folglich muß sich auch EA : CO = FC : AP verhalten. Nun sind die Produkte der äußern und mittlern Glieder EA × AP = CO × FC.

Also verhalten sich die Rechtecke aus den zwischen einer Assymptote parallel gelegenen und aus den mit den Assymptoten selbst parallel laufenden Linien einander gleich.

8) Lege ich nun die Linie LM und LN mit der entgegenstehenden Assymptote parallel, so muß auch dieses Rechteck LM × LN gleich seyn den Rechtecken EA × AO und FC × CP. Nun ist aber ML gleich LN, folglich ist LM × LN nichts anders, als LM^2 oder LN^2.

Wenn man also auf die Scheitel einer Hyperbel eine mit der entgegenstehenden Assymptote parallel laufende Linie zieht, so ist das Quadrat derselben gleich einem jeden Rechtecke, welches aus den Linien entstanden ist, die zwi-

schen den Assymptoten und der entgegenstehenden Seite parallel liegen.

Es leuchtet daher auch ein, daß sich die Assymptote zwar immer der parabolisch gekrümmten Linie nähern, aber nie sich mit ihr vereinigen wird. Denn das Rechteck aus den Theilen der Parallellinien, der durch die Hyperbel abgeschnitten werden muß, immer noch der Quadratfläche ML oder LN gleich seyn.

Des

Lehrbuchs

der

geometrischen Verhältnisse

fünfte Abtheilung.

Körperverhältnisse.

Fünfter Cursus

enthaltend

die Uebung im Auffassen der Verhältnisse dreifach zusammengesetzter Dimensionen.

Körperverhältnisse.

Wenn ich eine Quadratfläche aus einer Anzahl (z. B. vier) kleiner Quadratflächen entstanden denke, und aus jedem Quadrat einen Cubus mache (vergl. Cursus 1, p. 29), so würde ein Parallelepipedum entstehen, dessen Höhe ein Halb der Grundfläche wäre, und daß 2 × 4 = 8 Cubus enthalten würde. Soll aber aus der gegebenen Fläche ein Cubus gebildet werden, so muß eine jede Seite der Fläche eine gleiche Höhe erhalten; folglich muß auch eine jede Seitenfläche eben so viel gleiche Quadrate empfangen, als die Grundfläche hat. Nun sind vier Seitenflächen; also auch 4 × 4 Quadrate = 16 Quadratflächen herum. Ich muß mir diese Flächen allenthalben über die Grundfläche gelegt, oder vielmehr jedes einzelne Quadrat der gegebenen Fläche zum Cubus erhaben denken, so ist natürlich der ganze Raum zwischen den vier Seiten ausgefüllt, und dadurch auch eine obere gleiche Fläche entstanden.

Denke man sich eine ganze Fläche aus neun kleinern Flächen entstanden. Dann liegen drei Quadrate neben einander. Daraus soll ein Cubus gebildet werden. Legt man bloß einmal drei Quadrate über einander, so entsteht erst ein Prisma, welches drei in der Höhe, und eins in der Grundlinie hat. Die acht übrigen Quadrate würden unbelegt bleiben. Ich müßte also über eine jede der 9 Flächen

noch 3 legen, bis ich endlich so viel über einander, als neben einander hätte. Da neun Quadrate in der Grundfläche sind, so müssen drei neben einander liegen, folglich müßte ich auch nur 3 und 3 über einander legen, und ich erhalte also $3 \times 3 \times 3 = 27$ kleine Cubus, deren jeder die mit der Grundfläche gleiche Fläche haben würde.

Denke man sich 6×6 Quadrate neben einander, so würde $6 \times 6 \times 6$ Cubus zusammen genommen werden müssen, um einen größern Cubus zu erhalten, dessen jede Fläche 6×6 Quadrate hätte. Hingegen würden $6 \times 6 = 36$ Prismen, welche eine solche Quadratfläche zur Grundfläche, und eine dem Cubus gleiche Höhe hätten, erfordert, um der Größe des ganzen Cubus gleich zu seyn. Man kann daher sagen:

Der Cubus ist das Produkt aus der Grundfläche und Höhe.

Wenn eine Seitenlinie des Cubus 5 beträgt, so ist eine Fläche desselben 5×5, und die ganze Ausdehnung oder der Inhalt $5 \times 5 \times 5 = 125$. Da die 5 hier zwei mal sich selbst steigert, so sagt man, sie stehe in der zweiten Potenz. Es ist also 125 die zweite Potenz der 5, und hinwiederum ist die 5 die Cubikwurzel der 125, weil sie der erste Factor derselben ist. Gesetzt man wolle aus diesem Cubus einen andern machen, dessen Grundlinie oder Durchmesser gerade 6 betrüge, so müßte ich zuvor an die vorderste Seitenfläche, die ein Quadrat von 5, also 25 ist, 25 Cubus setzen. Dann betrüge die Grundlinie von dem hintersten bis zum vordersten Punkte erst 6, die Linie von der Linken zur Rechten wäre noch 5. Ich müßte also auf eine der Seitenflächen auch wieder 25 Cubus anlegen, dann würde die von der Linken zur Rechten sich fortziehende Linie auch 6 betragen. Aber immer wäre noch nicht die Höhe des Cubus wieder

hergestellt; denn dieser fehlt noch eins. Ich muß also auf die Oberfläche ebenfalls noch $5 \times 5 = 25$ Cubus legen. Nun erst hätte ich die Durchmesser nach allen Richtungen von 6. Aber da ich an die vorderste und oberste Seite 5 gelegt habe, so ist dadurch oben eine Lücke geblieben, die 5 in der Länge und eins in Dicke und Breite enthält, also ein Prisma von 5. Eben so ist auch ein solches Prisma zwischen der Seite und Vorderfläche geblieben, und endlich zwischen der Seitenfläche und der Oberfläche auch. Ich muß also noch drei mal ein Prisma von 5 ansetzen. Jetzt wird mir in der Ecke noch der Cubus der Differenz fehlen, der eins beträgt. Die Summe der angesetzten Cubus beträgt demnach $3 \times 25 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 101$. Diese zu $125 = 226$. Diese Zahl ist der Cubus von 6.

Wollte ich die Wurzel noch um 2 größer machen, so müßte ich natürlich an jede der drei Seiten setzen 2×25, zusammen 6×25, und die Prismen der Differenz würden dann 2×5 neben, und 2×5 über einander, zusammen 4×5 über und neben einander betragen. Drei solcher Prismen würden $3 \times 4 \times 5$ geben. Der Cubus der Differenz würde der Cubus von 2 seyn. Die anzusetzende Summe der einzelnen Cubus wäre diesemnach $6 \times 25 + 12 \times 5 + 2 \times 2 \times 2 = 218$. Diese zu 125 machen 343, das ist der Cubus von 7.

Der Unterschied zwischen zwei Cubus von verschiedener Größe besteht also aus dem dreifachen quadrirten Parallelepipedum der kleinern Cubikfläche und der Differenz beider Wurzeln, aus dem Prisma der kleinern Wurzel und dem Quadrat der Differenz, und endlich aus dem Cubus der Differenz.

2) Die Grundfläche sey aber ein Rechteck. Ich lege ihr noch so viel Flächen auf, daß die Höhe

der Grundfläche gleich ist, dann wird der Körper ein viereckiges Prisma.

2.

Wenn ich ein Prisma in der Richtung einer Diagonallinie von einer entgegengesetzten Kante bis zur andern durchschneide, so entstehen dadurch zwei Keile, deren ein jeder die Hälfte der Pyramide beträgt. Dieser Keil hat dann mit dem Prisma gleiche Grundfläche und gleiche Höhe. Ein jeder andere Keil von gleicher Grundfläche, gleicher Länge und Höhe wird dann diesem auch gleich seyn und überhaupt, ein jeder Keil, welcher mit einem Prisma gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, ist gleich der Hälfte desselben.

Wenn zwei oder mehrere Prismen mit einander gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, so haben sie auch gleichen Inhalt.

Wenn die Grundflächen zweier oder mehrerer Prismen verschieden, die Höhen aber gleich sind, so wird der ganzen Masse auch derselbe Theil fehlen. Denn allen Rechtecken, die ich mir über die Grundfläche gelegt denke, fehlt ein gleicher Theil, mithin fehlt er allen dreien Ausdehnungen, so bald einer fehlt.

Die Grundfläche ist aber aus einer zweifachen Ausdehnung zusammengesetzt. Sind daher die Grundflächen derselben von ungleicher Länge und Breite, so werden auch die Prismen in dem componirten Verhältniß der beiden Ausdehnungen stehen, oder sich verhalten, wie die Produkte aus den Grundflächen.

Denke ich mir die Höhe der Prismen ebenfalls verschieden, so entstehen dreifache verschiedene Ausdehnungen. Wenn z. B. die Längen der Grundflächen beider Prismen in einem Verhältnisse von

drei

drei zu vieren ständen, so würde bei gleicher Breite und Höhe das eine Prisma B $\frac{3}{4}$, das größere A seyn. Nehme man nun B noch $\frac{1}{4}$, der Breite ebenfalls noch $\frac{1}{4}$tel, so würde das Verhältniß seyn, wie $3 \times 3 = 9$ zu $4 \times 4 = 16$. Denke man sich nun aber die Höhe auch noch um ein Viertel vermindert, so würde der ganze Inhalt, also 9, auch noch $\frac{1}{4}$ verlieren: $9 - \frac{1}{4} \times 9 = 6\frac{3}{4}$, und das Verhältniß würde dann seyn $3 \times 3 \times 3 = 27$ zu $4 \times 4 \times 4 = 64$, als $\frac{27}{64}$. Es ergiebt sich also hieraus, daß alle Prismen allezeit in dem dreifachen Verhältnisse ihrer Massen stehen, oder sich so verhalten, wie die Produkte ihrer dreifachen Dimension.

Da man einen Cylinder ansehen kann als ein Prisma von unendlich vielen Seitenflächen, so wird dasselbe auch von ihm gelten. Cylinder von ungleichen Grund- und Seitenflächen werden daher auch sich verhalten, wie die Produkte aus den dreifachen Dimensionen; diese sind, der Diameter, die Peripherie der Grundfläche und die Höhe.

Wenn ich mir Pyramiden anstatt der Prismen denke, so werden auch diese Produkte der dreifachen Dimensionen seyn. Denke ich mir die Grundflächen zweier gleich hohen Pyramiden um den dritten Theil der Breite verschieden, so muß auch der ganze Körper und Inhalt um denselben Theil differiren. Nehme ich nun noch der Länge der Grundfläche ebenfalls den dritten Theil, so bleibt nur noch $\frac{4}{9}$ der Masse übrig. Entziehe ich endlich der Höhe noch ein Drittel, so daß die Gestalt sich nicht ändert, so muß ich hinwiederum allenthalben eine gleiche Dimension nehmen, sonst würde die Gestalt nicht bleiben. Es blieben dann nur noch übrig $\frac{8}{27}$ der Größe. Also ungleiche Pyramiden stehen nothwendig im Ver-

hältnisse ihrer dreifachen Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe.

3.

Aus einem Prisma, das z. B. 4 Kanten haben mag, denke ich mir eine Pyramide geschnitten. Von der obersten Ecke geht der Schnitt nach der Diagonallinie bis zu der entgegenstehenden untern; und auf der andern Seite geht ebenfalls der Schnitt, der Diagonallinie nach, bis an die entgegenstehende andere Ecke. Die Grundfläche behält die Pyramide ganz, und von zwei Seitenflächen bleiben ihr nur die Hälften; mithin hat die Pyramide nur zwei der sechs Oberflächen des Prisma. Es bleiben demnach übrig vier Seitenflächen. Daneben der Grundfläche auch die Höhe des Prisma der Pyramide geblieben ist, so ist ihr natürlich auch eine der Seitenkanten geblieben. Diese hat das Prisma ganz verloren; folglich hat der Rest noch drei Kanten. Schneide ich nun die entgegenstehenden Kanten, so entstehen zwei Theile des Restes, deren ein jeder eine ganze und zwei halbe Flächen nebst Höhe des Prisma erhalten hat. Da auch die Seitenflächen dieser Körper Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche sind, so sieht man, daß ein Prisma in drei Pyramiden von gleicher Grundlinie und Höhe zerlegt werden kann.

Denke ich mir also überhaupt so ein Prisma, das mit einer Pyramide gleiche Grundfläche hat, so kann das Verhältniß der Masse sich nicht ändern. Es läßt sich demnach ein jedes Prisma in drei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe so zerlegen, daß kein Rest bleibt, und hinwiederum drei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe enthalten die gesammte Masse eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe. Eine jede einzelne Größe ist aber der dritte Theil von drei gleichen

Größen, folglich muß eine Pyramide, die mit einem Prisma gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, gleich seyn dem dritten Theile desselben.

Denke ich mir die Grundfläche eines Prisma als ein Unendlicheck, so wird die Seitenfläche auch unendlichkantig, folglich cirkelrund seyn. Denke ich mir dazu die Grundfläche einer Pyramide von gleichem Umfange und gleicher Höhe, ebenfalls unendlicheckig, so wird auch die ganze Seitenfläche unendlichkantig seyn. Ein unendlichkantiges Prisma ist ein Cylinder, und eine unendlichkantige Pyramide ist ein Kegel. Da nun eine jede Pyramide ein Drittel des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so wird auch eine unendlichkantige Pyramide, d. i. ein Kegel, gleich seyn dem dritten Theile eines unendlichkantigen Prisma, d. i. eines Cylinders.

Da die Masse eines Prisma entsteht, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, so wird die Masse oder der körperliche Inhalt einer Pyramide gefunden werden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt.

Denke ich mir eine Pyramide, deren Grundfläche gleich ist der Grundfläche eines Prisma, und deren Höhe aber das dreifache der Höhe des Prisma enthält, so wird der Multiplicator $\frac{3}{3}$, das ist eins werden, und mithin die Grundfläche der Pyramide denselben Multiplicator erhalten, den das Prisma hat, folglich ist eine Pyramide demjenigen Prisma gleich, dessen Grundfläche und dessen dreifache Höhe sie hat.

Da der Kegel als eine unendlichkantige Pyramide, und ein Cylinder als ein unendlichkantiges Prisma angesehen werden kann, so muß auch

ein Kegel demjenigen Cylinder gleich seyn mit dem er gleiche Grundfläche und dessen dreifache Höhe er hat.

4.

Ich denke mir einen Kegel, der mit einer Halbkugel gleiche Höhe hat. Die Spitze dieses Kegels kann als Winkel angesehen werden, dessen Schenkel an der Seitenfläche des Kegels liegen. Die Endpunkte derselben liegen an den entgegengesetzten Punkten der Grundfläche. Der Perpendikel aus der Spitze der Halbkugel ist gleich dem Radius der Grundfläche. Da nun diese der Grundfläche des Kegels gleich ist, so wird auch der Perpendikel aus der Spitze des Kegels gleich seyn dem Radius der Grundfläche. Die Seiten des Dreiecks aus der Spitze des Kegels stehen demnach auf dem Diameter der Grundfläche, (weil sie auf den entgegengesetzten Punkten stehen,) und haben den Radius zur Höhe. Sie müssen folglich einen Peripherie-Winkel bilden, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Diameters stehen, und ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten eines Diameters stehen, ist ein rechter Winkel; folglich ist

derjenige Kegel, welcher mit einer Halbkugel gleiche Höhe und gleiche Grundfläche hat, rechtwinklig.

Ich denke mir den Kegel so gestellt, daß die Spitze desselben mit der Grundfläche auf einerlei Linie ist, und fälle aus der Mitte der Grundfläche einen Perpendikel; dieser ist der Höhe des Kegels, und folglich dem Radius der Grundfläche gleich. Mit dem Radius der Grundfläche bildet dieser Perpendikel einen rechten Winkel. Diejenige Linie der Seitenfläche des Kegels, welche von dem Endpunkte dieses Radius der Grundfläche bis in die

Spitze geht, bildet mit beiden genannten Linien ein rechtwinkliges Dreieck von gleichen Katheten, dessen Hypothenuse sie ist. Denke ich mir nun den Kegel als eine Menge von dicht übereinander liegenden Scheiben, und ich ziehe mir in einer derselben einen Radius bis in denselben Perpendikel, der durch die Mitte einer jeden Scheibe geht, so wird dieser mit derselben Seitenlinie des Kegels ein ähnliches Dreieck bilden. Da nun die Katheten des ersten Dreiecks einander gleich sind, so werden es auch die Katheten des ähnlichen Dreiecks seyn.

Es ist also der Radius einer jeden Fläche der Scheiben eines rechtwinkligen Kegels gleich dem Perpendikel, welchen ich aus demselben bis in die Spitze des Kegels fällen kann.

Denke ich mir denselben Perpendikel aus der Grundfläche bis in die Spitze des Kegels von dem Pole der Kugel aus gefällt, so würde er gleich seyn der halben Achse. Mache ich ihn zum Radius eines Zirkels, so würde dieser gleich seyn der Grundfläche des Kegels. Ein jeder Perpendikel aus irgend einem Punkt der Seitenfläche des Kegels bis in die Spitze würde gleich seyn dem Sinus der correspondirenden Kugelhöhe (derjenigen Höhe, welche von der Grundfläche der Kugel eben so weit absteht, als irgend eine Kegelscheibe von der Spitze desselben).

Ich denke mir eine Halbkugel aus einer unendlichen Menge dünner dicht übereinander liegender Scheiben entstanden. Die unterste Scheibe ist gleich der Grundfläche eines Cylinders. Allen andern Scheiben fehlt noch ein Ring, um den Scheiben des Cylinders gleich zu seyn. Je mehr man sich dem Pole der Halbkugel nähert, desto mehr beträgt der Unterschied, oder der Ring, um welchen

eine Cylinderscheibe größer ist, als eine correspondirende Kugelscheibe.

Eine Halbkugel ist gleich dem Cylinder, mit welchem sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, weniger der Summe der Kronen *), welche ich mir als um dieselbe herumliegend vorstellen muß. Fälle ich von irgend einem Höhenpunkt der Kugel einen Perpendikel auf die Grundfläche, so ist dieser der Sinus des Bogens eines Vertikalkreises der ganzen Kugel. Durch den Punkt der Grundfläche, in welche dieser Sinus fällt, denke ich mir einen Kreis mit der Peripherie der Grundfläche concentrisch. Dieser muß gleich seyn dem Parallelkreise, von welchem aus der Sinus gefällt war. Lege ich nun denselben Sinus ebenfalls in die Scheibe, so daß er mit dem Radius, auf welchem er steht, rechtwinklig bleibt, so muß er von dem Bogen der Grundfläche der Halbkugel eine gleiche Anzahl von Graden abschneiden, welche er von dem Vertikalkreise abschnitt, und die Peripherie desselben mit dem Endpunkte berühren (denn die Grundfläche der Halbkugel ist ja der größte Parallelkreis, und dieser ist gleich einem Vertikalkreise. Nun ist aber der genannte Perpendikel auf einem und demselben Punkt des gemeinschaftlichen Diameters beider Kreise, folglich muß er sie beide in gleichen Punkten berühren, und von beiden gleich viel Grade abschneiden).

Denselben Sinus kann ich auch als Tangente derjenigen Scheibe, von welcher aus er fällt, ansehen. Von der gleich großen Scheibe in der Grundfläche ist er eine solche Tangente, deren Spitze sich an der Peripherie des Ringes endigt. Denke ich mir diesen Ring in den Punkt der Ober-

*) Eine Krone nennt man den Ring zwischen zweien verschiedenen Scheiben, die concentrisch sind; also die Summe der Kronen sind die Ringe, die ich mir um eine jede Kugelscheibe noch denke.

fläche, von welchem aus der Sinus fällt, so würde er natürlich die Krone dieser Scheibe seyn.

Es ist daher derjenige Sinus, welcher von irgend einem Punkt der Oberfläche einer Hemisphäre in die Grundfläche fällt, gleich der Tangente in der Krone (d. i. derjenigen Tangente, deren Endpunkt in die Peripherie der Krone, d. i. in die Peripherie des Ringes trifft, welcher die Differenz zweier concentrischer Scheiben ist. Der Ring um die Cirkelfläche zweier concentrischer Kreise ist gleich demjenigen Zirkel, welcher diese Tangente zum Radius hat (Cursus IV, S. 180). Nun ist aber derselbe Sinus auch gleich dem Radius von der Spitze eines rechtwinkligen Kegels in gleicher Entfernung liegenden Scheibe; folglich ist diese Scheibe gleich der Krone, welche um die gleiche Höhe der Kugel gedacht werden kann. Nimmt man nun den Radius irgend einer Scheibe, so ist dieser gleich dem bis in die Spitze des Kegels laufenden Perpendikel; dieser gleicht dem Sinus der correspondirenden Kugelhöhe. Der Sinus in einer Kugel ist gleich der Tangente in der Krone derjenigen Kegelscheibe, deren Peripherie er berührt. Die Krone selbst ist gleich der Zirkelscheibe, welche diese Tangente zum Radius hat. Dieß war aber diejenige Kegelscheibe, welche von der Spitze des Kegels denselben Abstand hat, als die Krone von der Grundfläche der Kugel, oder als der Sinus besagt. Es ist also

eine jede Krone um eine Kugel gleich der correspondirenden Kegelscheibe eines rechtwinkligen Kegels von gleicher Grundfläche.

Denke ich mir den Kegel als aus einer unendlichen Anzahl von Scheiben zusammengesetzt,

und um die Halbkugel eine unendliche Menge von Kronen, so wird eine jede Krone der correspondirenden Kegelscheibe gleich seyn, und die Summe aller Kronen auch der Summe aller Kegelscheiben; folglich ist der ganze Kegel, welcher mit der Halbkugel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, gleich der Summe der Kronen um die Halbkugel.

Der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe; folglich müssen auch die ihm gleichen Kronen um die Kugel von derselben Grundfläche und Höhe gleich seyn dem dritten Theile des Cylinders. Nun fehlen aber der Halbkugel nur diese Kronen, um dem Cylinder gleich zu seyn. Da diese den dritten Theil des Cylinders enthalten, so muß die Halbkugel zwey Drittheile haben. Es ist also

eine jede Halbkugel gleich zweien Drittheilen des Cylinders von gleichem Umfange und gleicher Höhe.

Wenn ich aus der Mitte des Cylinders mir einen unendlich schmalen Ausschnitt denke, so erhalte ich ein Rechteck aus dem Radius und aus der Höhe des Cylinders. Da nun die Höhe des Cylinders gleich ist der halben Achse der Kugel, und diese dem Radius, so ist ein solches Rechteck ein Quadrat. Denke ich mir aus der Mitte der Kugel ebenfalls einen solchen Ausschnitt, so wird dieser die Gestalt eines Dreiecks mit einer bogenförmigen Hypothenuse haben. Diese gekrümmte Hypothenuse würde genau den Bogen von 90 Grad machen, denn er kommt aus dem Pole der Halbkugel. Vergleiche ich diese Fläche mit dem Quadrate, das aus dem Cylinder genommen wurde, so fehlt ihm noch diejenige Scheibe, die in der Krone enthalten ist. Da nun die ganze Krone ein Drit-

tel des Cylinders ist, so wird auch die Scheibe aus derselben ein Drittel derjenigen Scheibe seyn, welche aus dem Cylinder genommen ist.

Die Scheibe aus der Halbkugel mit der Scheibe aus der Krone gleicht derselben Quadratfläche der Scheibe aus dem Cylinder, und eine jede Scheibe der Krone beträgt $\frac{1}{3}$; folglich muß eine jede Scheibe aus der Achse und Grundfläche der Halbkugel $\frac{2}{3}$ der Scheibe eines Cylinders von gleichem Umfange und gleicher Höhe seyn.

Wenn ich nun von der Zone einer Halbkugel einen Perpendikel auf die Grundfläche fallen lasse, so wird dieser eine Proportionallinie des Dreiecks seyn. Denke ich mir nun von diesen einen Ausschnitt, so würde auch dieser Ausschnitt ein Dreieck mit einer sphärischen Hypothenuse darstellen, dessen Seiten dem größern proportionirt seyn würden. Denke ich mir dazu einen Cylinder, der mit der Zone gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, und ich schneide eine Quadratfläche aus, so würde der Ausschnitt durch den in die Zone gefällten Perpendikel gleich seyn $\frac{2}{3}$ des Ausschnitts der Quadratfläche aus dem Cylinder von gleicher Höhe. Denke ich mir alle Ausschnitte nun aus dem Cylinder sowohl, als auch aus der Zone, deren Ränder denselben Perpendikel zum Durchmesser haben, zusammengesetzt, so entstehet durch die Rechtecke der Rand des Cylinders, und durch die Dreiecke mit einer sphärischen Hypothenuse der Rand der Zone. Ich kann mir also den Ring des Cylinders als aus einer unendlichen Menge von Dreiecken mit einer sphärischen Hypothenuse bestehend denken. Da nun jede einzelne zwei Drittel der Hypothenuse ist, so muß auch der ganze Rand der Zone gleich seyn zweien Dritteln des Randes eines Cylinders von gleicher Höhe und

Grundfläche, dessen Durchmesser gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche der Zone.

Wenn dem Cylinder und der Zone dieser Rand genommen wird, so bleibt von beiden noch übrig ein Cylinder von gleicher Größe (denn es ist der Grundfläche der Zone eben so viel genommen, als der Grundfläche des Cylinders). Ich denke mir nun die Zone als bestehend aus dem genannten Gurt und aus dem Cylinder der Oberfläche, und eben so den Cylinder aus dem genannten Rande und aus demselben Cylinder. Der Rand der Zone ist ⅔ des Ringes aus dem Cylinder. Wäre der Cylinder in der Zone auch ⅔ des Cylinders, der nach Sonderung des Ringes von dem größern Cylinder entstanden ist, so wäre die ganze Zone zweien Dritteln des Cylinders gleich. Will ich also dieß Verhältniß herstellen, so muß ich dem Cylinder aus der Oberfläche der Zone noch ein Drittel nehmen. Es ist daher die Zone gleich ⅔ des Cylinders, mehr dem dritten Theile desjenigen Cylinders, der die Oberfläche der Zone zur Grundfläche hat. Nun ist der dritte Theil des Cylinders der Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe; folglich ist

die Zone gleich zweien Dritteln des Cylinders, welcher die größte ihrer Flächen zur Grundfläche hat, mehr dem Kegel aus ihrer Oberfläche.

Dem Rande der Zone fehlt die Summe der Kronen, die um denselben liegen, und die ⅓ desselben betragen. Diese mit dem Kegel aus der Oberfläche werden dem dritten Theile der ganzen Zone gleich seyn; denn jeder für sich ist ein Drittel der beiden Theile, aus welchen bestehend ich mir die Zone denke.

5.

Wenn mehrere Kugeln von verschiedener Größe vorhanden sind, so vergleiche ich ihre Diameter. Der Unterschied ihrer Größe ist, wie bei den Cirkeln, diejenige kugelrunde Wölbung, innerhalb welcher die Differenz des Diameters der großen Kugel sich befindet. Denke ich mir diesen Unterschied bei einer jeden Cirkelscheibe, so ist er diejenige Krone, welche die Differenz beider correspondirenden Cirkelscheiben ausmacht. Diese verhalten sich aber zu einander, wie die Quadrate ihrer Diameter. Da nun der Körper eine dreifache Ausdehnung hat, und die dreifache Ausdehnung eines Quadrats einen Cubus giebt, so werden sich die Kugeln zu einander verhalten, wie die Cubi ihrer Diameter. Da nun der Cubus eine dreifache Multiplikation einer Linie ist, so kann man auch sagen, daß die Kugeln von verschiedener Größe in dem Verhältnisse der zweiten Potenz ihrer Diameter stehen. Kenne ich also von zweien Cubus die Länge ihrer Diameter, so finde ich das Verhältniß ihrer Größe, wenn ich die Diameter in die zweite Potenz erhebe, oder cubire, z. B. der Diameter einer Kugel sey 5, der Diameter einer andern sey 9. Nachdem Obigen muß die erste Kugel $\frac{125}{729}$ der letzten enthalten. Eine Kugel, deren Achse einer andern enthält, ist also um $5\frac{104}{125}$ mal größer.

6.

Von zweien Proportionallinien ist eine immer eine bestimmte Anzahl aliquoter Theile der andern. Sey z. B. eine Linie 3, die andere 5, so ist die erste $\frac{3}{5}$ der zweiten. Quadrire ich nun beide, so stehen nicht mehr die Flächen in demselben Verhältnisse; denn sollte dieß der Fall seyn, dann müßte die 3 eben so viel mal genommen werden, als die 5. Nun kann sich aber die 3 nur drei mal wiederholen; es muß mithin dem Quadrat nicht

nur in der Länge, sondern auch in der Breite $\frac{2}{5}$ fehlen; $25 - \frac{2}{5} = 15$, und 15 weniger zwei Fünftel ist gleich 9, und dieß ist das Quadrat von 3.

Wenn ich aber die eine Linie durch die andere multiplicire, so erhalte ich ein Rechteck, welches zwischen beiden Quadraten mitten inne liegt; indem es die Länge mit dem größern, die Breite mit dem kleinern Quadrat gleich hat. Hier also beträgt die Länge $\frac{2}{5}$ mehr, als die des Quadrats von 3 und die Breite, mithin auch Größe des Quadrats von 5×5 ist hinwiederum noch $\frac{2}{5}$ mehr, als das Rechteck, $3 \times 5 = 15$. Es ist daher immer das Rechteck aus zwei gegebenen Proportionallinien die mittlere Proportionalfläche zwischen den Quadraten aus beiden Linien $3 \times 3 : 3 \times 4$ gleich $3 \times 4 : 4 \times 4$.

Ich stelle mir eine gestümpelte Pyramide vor, deren Grundlinie a (als Zahl sey 4) ist. Die Seitenlinie der Oberfläche stelle ich mir unter b (z. B. 3) vor. Ferner denke ich mir aus der Spitze der ganzen Pyramide einen Perpendikel auf die Grundfläche, den ich c (8) benennen will. Denjenigen Theil des Perpendikels, der in dem von der ganzen Pyramide abgeschnittenen Stück — also in der kleinern Pyramide die Oberfläche bb ($3 \times 3 = 9$) zur Grundfläche hat, nenne ich d (6); folglich ist der Rest des Perpendikels, oder der in der abgestutzten Pyramide befindliche Theil des Perpendikels c — d (8 — 6). Da die Linie der Grundfläche a und die Linie der Oberfläche b ist, so muß die Grundfläche seyn $a \times a = aa$ ($4 \times 4 = 16$), und die Oberfläche $b \times b = bb$ ($3 \times 3 = 9$). Ferner muß ich mir vorstellen, daß b (3) eine Proportionallinie von a (4) ist; denn die Grundlinie einer Pyramide ist anzusehen als Grundlinie eines Dreiecks, und die Linie durch

irgend einen Punkt mit der Grundfläche parallel gezogen, giebt mir dann natürlich die Proportionallinie von einem Dreieck, dessen Scheitelwinkel die Spitze der Pyramide ist. Eben so ist aber auch der Perpendikel c (8) durch die Proportionallinie b (6) in proportionirte Theile getheilt; denn die Proportionallinie schneidet proportionirte Theile ab. Es verhält sich also b (3) : d (6) = a (4) : c (8), oder auch a (4) : b (3) = c (8) : d (6); daher ist ad ($4 \times 6 = 24$) = bc ($3 \times 8 = 24$) Fläche. Zwischen den beiden Flächen aa (16) und bb (9) denke ich mir noch eine mittlere Proportionalfläche, die also aus beiden Factoren a und b entstanden, mithin ab (4×3) seyn muß.

Den Inhalt einer Pyramide finde ich, wenn ich den dritten Theil seiner Höhe mit der Grundfläche multiplicire. Die Höhe giebt mir der Perpendikel c, mithin wäre der Inhalt der ganzen Pyramide, wenn sie nicht gestümpelt wäre, auf Cubus gebracht: $c \times aa = \frac{aac}{3}$ ($16 \times \frac{8}{3}$). Die kleine Pyramide, welche eben der großen entzogen ist, muß seyn das Produkt aus dem dritten Theil ihrer Höhe und ihrer Grundfläche. Diese Grundfläche ist aber bb. Die Höhe ist der Theil des in ihr befindlichen Perpendikels d. Wenn ich nun den dritten Theil davon nehme, also $\frac{bbd}{3}$ ($9 \times \frac{6}{3}$), so habe ich den Cubikinhalt, oder die Größe, welche entsteht, wenn ich die Pyramide in einen Cubus umwandele. Ziehe ich diese kleine Pyramide ab von der großen, so erhalte ich die abgestutzte Pyramide, die also $aac - bbd$ ist $= 16 \times \frac{8}{3} - 9 \times \frac{6}{3}$.

Ich will itzt folgende drei Flächen der gestümpelten Pyramide zusammen thun:

α) die Grundfläche aa (16),

β) die Oberfläche bb (9),

γ) die mittlere Proportionalfläche zwischen beiden ab (12). Die Pyramiden, die ich dadurch erhalte, wären also $\frac{aac + bbc + abc}{3}$, $\frac{128 + 72 + 96}{3}$. Von einer jeden Pyramide einzeln die Höhe d und die Flächen $bb + aa + ab$ genommen, so erhält man für die fehlenden Theile der Pyramiden $\frac{aad}{3} + \frac{bbd}{3} + \frac{abd}{3}$, $\frac{96 + 54 + 98}{3}$. Die gestümpelten Pyramiden sind nun $\frac{aac - aad, bbc - bbd - abc - abd}{3}$ die Flächen immer mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt. Nun ist nach Obigem die Fläche ad gleich bc. Ich kann also auch diese für einander setzen, also anstatt aad kann ich setzen abc, und im fünften Gliede kann ich anstatt abc setzen die Fläche bbc, dann ist der Inhalt aller gestümpelten Pyramiden $\frac{aac + bbc + abc - abc - bbd - bbc}{3}$. Die gleichen Größen heben sich auf. Das zweite Glied $+ bbc$ wird also durch das sechste $- bbc$ aufgehoben, und das dritte Glied durch das vierte $+ abc$ durch $- abc$. Es bleibt diesemnach nur noch übrig $\frac{aac - bbd}{3}$. Das ist also der Inhalt der Pyramide. Es ist also:

$$\frac{\overset{*}{aac} + \overset{**}{bbc} + \overset{***}{abc} - \overset{\dagger}{aad} - \overset{\dagger\dagger}{bbd} - \overset{\dagger\dagger\dagger}{abd}}{3} = aac - bbd.$$

* 1) $\frac{aac}{3}$ ist die Pyramide aus der Grundfläche und ganzen Höhe.

** 2) $\frac{bbc}{3}$ ist die Pyramide aus der ganzen Höhe und der Oberfläche.

*** 3) $\frac{abc}{3}$ Pyramide aus der mittlern Proportionalfläche und der Höhe.

† 4) $\frac{aad}{3}$ ist eine Pyramide aus dem Unterschiede der Höhe, welcher zwischen dem abgeschnittenen Theile und der ganzen Pyramide statt findet. Dieser ist gleich der Pyramide aus der ganzen Höhe und der mittlern Proportionalfläche, $\frac{aad}{3} = \frac{abc}{3}$, indem die Fläche ad gleich ist bc, und ich eine jede der Größen abc und aad als Höhe ansehen kann. Wenn ich bc zur Grundfläche und a zur Höhe nehme, so bekomme ich zwar ein anders gestaltetes, aber nichts desto weniger gleich großes Prisma, indem dasselbe Volumen der Masse in beiden Fällen vorhanden ist ($4 \times 3 \times 8 = 4 \times 4 \times 6$). Also wird die Pyramide abc durch $\frac{aad}{3}$ richtig aufgehoben.

†† 5) $\frac{bbd}{3}$ ist die Pyramide aus der Oberfläche der gestümpelten Pyramide und aus demjenigen Theile der Höhe, welcher in dem Unterschiede selbst oder in dem Stück, welches zur ganzen Pyramide noch fehlt, enthalten ist; mithin ist es die fehlende Pyramide selbst.

††† 6) $\frac{abd}{3}$ ist die Pyramide aus der mittlern Proportionalfläche und aus der Höhe des kleinern von dem größern abgeschnittenen Pyramide. Stelle ich mir nun bd als Grundfläche und a als Höhe vor, so wird das Volumen des Prisma ganz dasselbe bleiben müssen, und nur eine andere Gestalt annehmen können. Nun ist aber ad gleich bc, folglich sind abd und bbc Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Ziehe ich also abd Pyramide von bbc ab, so bleibt nichts übrig.

Nehme ich nun allen Pyramiden dasjenige, was sie durch die Multiplikation der Höhe a erhalten haben, so bleibt noch übrig die Höhe der gestümpelten Pyramide, und die drei Pyramiden, welche der gestümpelten Pyramide gleichen, sind aus der Grundfläche, aus der Oberfläche, und aus der mittlern Proportionalfläche zwischen beiden und der Höhe der gestümpelten Pyramide.

Da die Höhe bey allen drei Pyramiden dieselbe ist, so werden alle drei auch gleich seyn einer Pyramide, welche alle drei Flächen zur Grundfläche, und die Höhe der gestümpelten Pyramide zur Höhe haben. Daher ist

Eine gestümpelte Pyramide gleich derjenigen Pyramide, welche die Grund- und Oberfläche, samt der mittlern Proportionalfläche, zwischen beiden zur Grundfläche, und die Höhe der gestümpelten Pyramide zur Höhe hat.

Ein Kegel kann allezeit angesehen werden als eine Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen. Was daher von allen Pyramiden gilt, muß auch von den Kegeln gelten. Daher ist auch ein gestümpelter Kegel gleich demjenigen Kegel, welcher die Grund-, Ober- und mittlere Proportionalfläche zur Grundfläche, und die Höhe des gestümpelten Kegels zur Höhe hat.

Flächen der Körper.

Wenn ich alle Seitenflächen eines Prisma dicht neben einander mir denke, so erhalte ich ein Rechteck, dessen Grundlinie so lang ist, als die gesammten Grundlinien der Seitenflächen, und dessen Höhe gleich ist der Höhe des Prisma. Ich kann

also behaupten: das Rechteck au's der Summe der Grundlinien, der Seitenflächen und aus der ganzen Höhe des Prisma ist gleich der Summe der Seitenflächen eines Prisma. Denke ich mir eine Pyramide, so sind die Seitenflächen Dreiecke. Jede Grundlinie einer Seitenfläche ist eine Seitenlinie der Grundfläche. Alle Seitenlinien der Grundfläche zusammen geben die Summe der Grundlinien.

Ich denke mir eine Pyramide, die ein Hexagon zur Grundfläche haben mag. Die Seitenlinien dieser Grundfläche sind die Grundlinien der Dreiecke, welche die Seitenflächen der Pyramide ausmachen. Nehme ich diese Seiten der Grundfläche, so nehme ich auch alle Grundlinien der Dreiecke an der Seite. Denke ich mir ein Dreieck, das die Höhe der Pyramide und die Grundlinie eines der Seitenflächen derselben hat, so muß dieses gleich seyn einer Seitenfläche der Pyramide. Denn Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe verhalten sich gleich. Nehme ich mir nun alle Seiten des Polygons zur Grundlinie, und die Höhe der Pyramide zur Höhe dieses Dreiecks, so erhalte ich ein Dreieck, welches zur Grundlinie alle Grundlinien der Seitendreiecke der Pyramide und die Höhe derselben hat. Dieses Dreieck muß natürlich der Summe aller Seiten-Dreiecke der Pyramide gleich seyn; also

Ein Dreieck aus der Höhe der Pyramide und aller Seitenlinien der ihr zum Grunde liegenden Fläche ist gleich der Summe der Seitenflächen.

Da nun ein Dreieck gleich ist einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und halber Höhe, oder umgekehrt, dem Rechtecke aus der halben Grundlinie und ganzen Höhe, so ist die Summe der Seitenflächen einer Pyramide gleich der Fläche ei-

nes Parallelogramms aus der halben Anzahl der Seiten der Grundfläche und aus der ganzen Höhe der Pyramide.

Denke ich mir nun die Grundfläche einer Pyramide als ein Unendlicheck, so wird sie eine Cirkelfläche. Die Summe der Seiten dieses Unendlichecks ist die Peripherie. Die Seitenflächen der Pyramiden werden dann auch ebenfalls zusammen in Cirkelrundung schließen, und daher einen Kegel bilden. Das Dreieck aus der Peripherie der Grundfläche und der ganzen Höhe des Kegels muß sonach gleich seyn der ganzen Seitenfläche des Kegels, und hinwiederum ein Rechteck aus der halben Peripherie der Grundfläche und der ganzen Höhe des Kegels muß diesem Dreiecke gleich seyn, folglich ist die Seitenfläche eines Kegels gleich der Fläche eines Rechtecks aus der halben Peripherie der Grundfläche und aus der ganzen Höhe des Kegels.

Die Seitenfläche eines Cylinders ist hingegen gleich dem Rechtecke aus der ganzen Circumferenz der Grundfläche und aus der Höhe des Cylinders. Denkt man sich nun die Höhe des Cylinders gleich der Höhe eines Kegels, und die Grundflächen beider Körper ebenfalls einander gleich, so wird die Seitenfläche des Kegels in dem Rechtecke aus der halben Circumferenz und Höhe enthalten seyn, folglich wird die Grundlinie desjenigen Rechtecks, welches die Seitenfläche des Kegels enthält, die Hälfte desjenigen seyn, in welchem die ganze Seitenfläche des Cylinders enthalten ist; folglich ist auch die Seitenfläche eines Kegels gleich der halben Seitenfläche eines Cylinders von gleichem Umfange und gleicher Höhe.

Denke ich mir die Höhe eines Cylinders gleich dem Radius seiner Grundfläche, so wird die Seitenfläche ein Rechteck aus dem Radius und aus

der ganzen Peripherie darstellen. Die Grundfläche hingegen als Cirkelfläche ist gleich dem Rechtecke aus dem Radius und aus der halben Peripherie. Ein Rechteck aus dem Radius und aus der halben Peripherie ist gleich der Hälfte eines Rechtecks aus dem Radius und aus der ganzen Peripherie; folglich ist die Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe gleich ist dem Radius, gleich der halben Seitenfläche, oder die Seitenfläche eines Cylinders, dessen Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist, beträgt das Doppelte der Grundfläche.

Man denke sich nun einen Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe hinzu, so ist nach dem Obigen die Seitenfläche des Kegels gleich der Hälfte des Cylinders. Die Hälfte der Seitenfläche des Cylinders ist der Grundfläche gleich; die Grundfläche des Cylinders gleicht der Grundfläche des Kegels; die Seitenfläche des Kegels ist gleich der halben Seitenfläche des Cylinders, folglich muß auch die Seitenfläche eines rechtwinkeligen Kegels seiner eigenen Grundfläche gleich seyn.

Anmerk. Denke ich mir die Seitenfläche eines Kegels aus der Grundfläche entstanden, so muß ich mir vorstellen, daß die letztere aus einer unendlichen Anzahl von Cirkellinien, die dicht neben einander liegen, bestehe; lege ich nun diese über einander, so würden sie sich immer verkleinernd in einem Punkte verlieren, der gerade der Mittelpunkt der Fläche ist.

Ein Cylinder, der mit einer Halbkugel gleiche Grundfläche und Höhe hat, enthält drei mal die Hälfte derselben Halbkugel. Entziehe ich der Halbkugel einen Kegel von derselben Grundfläche und Höhe, so entziehe ich ihm den dritten Theil seiner Größe, und der Rest ist nun gleich der Halbkugel. Dieser Rest ist aber der Gestalt nach ein Trichter.

Dem Trichter fehlt die Oberfläche. Ich denke mir denselben aus einer unendlichen Menge von

Pyramiden zusammengesetzt, deren Grundflächen alle an der Seitenfläche liegen, und folglich die Seitenflächen desselben bilden. Eben so entstanden denke ich mir die Kugel. Da diese gleich ist dem Trichter, so werden zu ihr gleich viele Pyramiden von gleicher Größe erforderlich seyn. Denke ich mir alle ihre Grundflächen auf der Oberfläche liegend, so wird diese natürlich gleich seyn müssen der Seitenfläche des Cylinders, an der ebenfalls alle Grundflächen einer gleichen Anzahl von Pyramiden liegen. Es ist also

die Oberfläche der Halbkugel gleich der Seitenfläche eines Cylinders von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Nun ist die Seitenfläche des Cylinders gleich einem Rechteck aus seiner Höhe und Peripherie, oder einem Rechtecke aus dessen Radius und ganzem Umfange, folglich ist auch die Halbkugel gleich dem Rechtecke aus ihrer Höhe, d. i. aus der halben Achse und der ganzen Peripherie der Grundfläche. Die ganze Peripherie der Grundfläche ist aber gleich dem Dreiecke aus der Peripherie und dem Radius, S. 172, und daher dem Rechtecke aus der halben Peripherie und dem Radius (S. 168 u.). Das Rechteck aus einer ganzen Linie ist gleich dem doppelten Rechtecke aus der halben Linie, so bald sich die Höhen gleichen; folglich ist die Oberfläche der Halbkugel gleich ihrer doppelten Grundfläche.

Da nun die Peripherie der Grundfläche den größten Umfang der Kugel hat, oder einem Vertikalkreise derselben gleich ist, so kann man auch sagen: die Oberfläche der Halbkugel ist gleich der doppelten Cirkelfläche aus dem Radius und einem ihrer Vertikalkreise. Da nun eine solche Fläche gleich ist dem Rechtecke aus dem Radius und der halben Peripherie, so muß die doppelte

Fläche gleich seyn dem Rechtecke aus dem Radius und der ganzen Peripherie; folglich ist die Oberfläche der Halbkugel gleich dem Rechtecke aus dem Radius und aus der ganzen Peripherie eines ihrer Vertikalkreise.

Die Oberfläche der ganzen Kugel ist gleich der vierfachen Cirkelfläche aus der Peripherie eines ihrer Vertikalkreise, d. i. einem Rechtecke aus dem Diameter und der ganzen Peripherie eines ihrer Vertikalkreise.

Wenn man einem Cylinder, der mit einer Zone gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, einen Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe entzieht, und der Zone den Kegel aus der Oberfläche nimmt, so ist der Trichter des Cylinders gleich dem Trichter der Zone, welcher entsteht, wenn man einen Kegel aus der Oberfläche desselben abzieht.

Denke ich mir beide Trichter aus einer unendlichen Menge von Pyramiden zusammengesetzt, deren Grundflächen die Oberflächen desselben bilden, und deren Höhe der Radius ist, so werden zu einem jeden gleich große und gleich viel solcher Pyramiden gehören, da diese Pyramiden gleiche Grundfläche haben, so müssen sie auch gleiche Oberflächen bilden; folglich ist die Seitenfläche einer Zone gleich der Seitenfläche eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Da die ganze Oberfläche der Halbkugel gleich ist der Oberfläche eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe, und die Seitenfläche der Zone gleich ist der Seitenfläche ihres correspondirenden Cylinders, so ist auch die Oberfläche eines Segments gleich der Seitenfläche eines mit ihr gleich hohen Cylinders.

Weil die Circumferenz des Cylinders gleich ist der Grundfläche der Halbkugel, so ist auch die Oberfläche eines Segments gleich der Fläche eines Rechtecks aus der Peripherie eines Vertikalkreises und der Höhe des Segments.

Die Cylinder von gleichem Umfange verhalten sich wie ihre Höhen, folglich auch die Seitenflächen derselben. Nun sind aber die Seitenflächen des Cylinders gleich den Kugelflächen von gleicher Circumferenz und Höhe, daher verhalten sich auch

die Oberflächen der Kugelscheiben zu einander, wie die Theile der Achse, welche in denselben liegen.

So viel Theile der ganzen Achse also in einer Zone oder in einem Segmente enthalten sind, so viel Theile enthält auch die Seitenfläche der Zone, oder die Oberfläche des Segments Theile der ganzen Kugeloberfläche.

Ende des fünften geometrischen Cursus.

Beschluß der reinen Geometrie.

Nachträge, Verbesserungen und Druckfehler.

I Curs.

Seite 10.	Zeile 8.	v. u. statt: zweiten, lies: dritten, und nach: sie, fehlt sich.
— 13.	— 2.	v. u. nach: einem schrägen, fehlt: oder zwei Schräge
— 15.	— 6.	v. o. nach: hat, fehlt: und ein Dreieck, welches einen stumpfen Winkel hat.
— 17.	— 10.	v. u. nach: Parallelseiten, fehlt: und vier rechte Winkel hat.
— 19.	— 1.	v. u. nach: und, fehlt: wozu jede Seite.
— 23.	— 2.	v. u. st. Tangente l. Secante.
— 24.	— 14.	v. n. nach: Linie, fehlt: deren Mittelpunkt von allen Theilen des Bogens in gleicher Entfernung liegt.
— —	— 13.	nach: Endpunkten, fehlt: und mit seinem Centrum.
— 25.	— 10.	v. o. nach: der, fehlt: einen Theil des (den fällt weg).
— 33.	— 2 und 6.	v. u. st. senkrechte l. senkrechten.
— 35.	— 5.	nach: untersten, setze hinzu: vordersten.
— 36.	— 28.	v. o. nach: unter der, fehlt: obersten.
— —	— 32.	v. o. vor: vordersten, fehlt: untersten.
— 37.	— 16.	v. u. nach: von st. der l. denen.

Seite 39. Zeile 18. v. o. st. Prisma l. Pyramide.
— 43. — 18. v. o. nach: Linie von, fehlt dem Mittelpunkt.

II Curs.

Seite 47. nach Zeile 9. l. Fig. 1.
— — — — 14. l. Fig. 2.
— 50. Zeile 12. st. Fig. 6. l. Fig. 7.
— — — 24. st. Fig. 7. l. Fig. 8.
— — — 26. nach: dritten, l. Linie.
— 51. — 11. st. Fig. 8. l. Fig. 9.
— — — 18. st. Fig. 9. l. Fig. 10.
— 53. — 28. nach: enthalten, l. Fig. 11.
— 55. — 34. vor (10) l. Fig. 13.
— 57. — 1. st. Fig. 15. l. Fig. 14 und 15.
— — — 11. vor 11. l. Fig. 16.
— — — 30. vor 12. l. Fig. 17.
— — — 38. st. zwey rechte l. ein rechter.
— 58. — 7. nach: stumpfen Winkel l. zwey rechte.
— — — 20. st. Fig. 16. l. Fig. 18.
— 59. — 21. st. Fig. 17. l. Fig. 19.
— 61. — 29. st. Fig. 19. l. Fig. 21.
— — — 31. st. dem Endpunkte l. den Endpunkten.
— 62. — 9. st. Fig. 20. l. Fig. 22.
— 63. — 3. nach: gleich, l. einem der beiden untern.
— — — 4. nach: untern, l. Fig. 23.
— — — 16, 18, 19, 21, 22 bis 24. l. st. b allezeit c.
— 64. nach Zeile 3. l. Fig. 24. und vorher fällt weg: oder mit gleicher Cirkelöffnung beschreibt.
— — Zeile 18. st. Fig. 24. l. Fig. 25.
— — — 29. st. Fig. 25. l. Fig. 26.
— 65. — 4. vor 4) l. Fig. 26.
— — — 11. st. a e b l. a e c.
— — — 21. st. Fig. 33. l. Fig. 27.
— 66. — 3. st. Fig. 27. l. Fig. 28.
— — — 5. nach: Scheitelwinkel l. in.

Seite

Seite 66. Zeile 23. st. Fig. 28. l. Fig. 29.
— 67. — 4. st. e d g, l. e d b, st. e g, l. e b.
— — — 5. st. b a g = e d g, l. b a c = e d g.
— — — 6. st. b a g der Bogen e g, l. b a c den halben Bogen e b.
— 68. — 5. st. Fig. 29. l. Fig. 30.
— — — 22. nach: rechten l. Winkel.
— 69. — 6. st. Fig. 30. l. Fig. 31.
— — — 26. st. Fig. 31. l. Fig. 32.
— 70. — 7. st. Fig. 32. l. Fig. 33.

III Curs.

— 74. — 17. nach: welcher durch l. die Mitte der.
— 75. — 1. st. zwei senkrechte, l. zwey wagerechte.
— 77. — 8. nach: daß, fehlt: ihre Endpunkte.
— 79. — 4. st. dreier, l. drei.
— 84. — 14. st. Schneidungslinie l. Schneidungslinien.
— 91. — 8. st. GBAC, l. ABCD. st. Diagonallinie GA l. DA (diese Diagonallinie ist in der Fig. 29. nicht gezogen und muß also hinzugedacht werden).
— — — 28. st. immer einer in den andern l. in einander und daher von ungleicher Größe seyn müssen.
— 92. — 4. bleibt gleich weg.
— 95. — 19. nach den Worten: von 120° setze hinzu: Wenn sich daher zwey excentrische Kreise so schneiden, daß ihre Peripherien gegenseitig die Centra berühren, so tragen die Bogentheile, die in einander liegen, 120 und die außer einander sind 240 Grad.

Seite 95. Zeile 23. nach: Verbindungslinie, bleibt weg: der Radius, dann: und statt: Schneidungspunkt l. Schneidungspunkte.

Seite 96. Zeile 6. st. Peripherien l. Centra.
— — — 15. nach: schneiden, setze man hinzu, und umgekehrt, wenn die Centrallinie länger ist, als einer der Radien des Cirkels, so werden durch sie beide Peripherien durchschnitten, ist sie länger als die Radien beider Kreise zusammengenommen, so schneidet die Centrallinie beide Peripherien, aber die Peripherien schneiden sich selbst nicht.
Seite 96. Zeile 22. bleibt weg: folgende vierte.
— 103. — 12. st. Fig. 4 und 5. l. 43.
— — nach Zeile 28. setze Fig. 44 und 45.
— 104. Zeile 5. st. Fig. 9. l. Fig. 46 und 47.
— 105. — 7. st. Fig. 10. l. Fig 47.
— — — 7. Anmerkung: nach: Anschauung, fehlt: trefliche Ideen st. die Anschauung l. der Anschauung.
Seite 109. Zeile 25. unter a denke man sich den in Fig. 25 nicht bezeichneten perpendikular unter D liegenden Punkt der Peripherie. Weiter unten bezeichnet der Buchstabe X (B X Z. 30.) denselben Punkt.
Seite 110. Zeile 1. v. u. st. A C D l. A E D.
— 112. — 2. bleibt weg: Vierecks in einem und st. Peripherie, l. Cirkelperipherie; st. Vierecke, l. Vierecks. In die hierhergehörige Figur 59. ist im obersten Winkel zur linken, also unter i, in den Winkel o zu setzen; und drüber in das Dreieck C i K den Buchstaben q. Ueber die Linie i h in den Winkel zur Rechten setze man g.
Seite 112. Zeile 10. st. k + q l. r + g und st. s + q l. s + g.
— — — — nach c h + h A setze Fig. 60. und vor den Anfang der folgenden Zeile: 4).
— 114. — 2. nach: äußerer Winkel, setze hinzu: des Dreiecks B A C. vergleiche p. 52. ß.
— 115. — 15. st. B A C und B A D lies: B A C ∾ B A D.
— — — 26. st. Fig. 60. l. Fig. 61.
— 116. nach Z. 14. setze man noch hinzu: Wenn man sich den Radius B A bis an den entgegen

stehenden Punkt der Peripherie in (r) verlängert denkt, und dann von g aus eine Sehne bis r (so nenne ich diesen B A entgegenstehenden Peripheripunkt) beschreibt, so entsteht ein stumpfwinkeliges Dreieck g A r. Der Winkel ist dann ein Peripheriewinkel und als solcher gleich der Hälfte eines Centriwinkels, folglich ist auch der Sinus desselben gleich dem Sinus von 30° (denn der Sinus g k ist der Sinus von 60 Grad). Fälle ich nun aus dem stumpfen Winkel A dieses Dreiecks einen Perpendikel in die entgegenstehende Sehne, so wird der Winkel, so wie die Sehne, in zwei gleiche Theile getheilt, da nun der Winkel B A G 60° beträgt, so muß der des stumpfen Winkels 120 betragen, der halbe also 60. Es steht diesem nach die halbe Sehne auch einen Winkel von 60° gegenüber, und muß daher gleich seyn dem Sinus von 60; folglich muß die ganze Sehne g r auch der ganzen Tangente von 60° gleichen.

Der Sinus des stumpfen Winkels fällt jenseits des Sinus totus, nun ist aber der Sin. tot. der größte Sin. und die Sinus, die in gleicher Entfernung von ihm sind, sind einander gleich. Es muß daher der stumpfe Winkel denselben Sinus haben, als sein Nebenwinkel.

Anderer Beweis. Curs. III. Tab IV. man fälle von B aus einen Perpendikel und verlängere die Linie A C bis zu diesem Perpendikel. Man nenne dieselbe p. Man fälle noch einen Perpendikel aus irgend einem Punkt der Linie C B, und nenne ihn s. Endlich fälle man noch einen dritten Perpendikel aus irgend einem Punkt der Linie A B, den wir t nennen, und nun denke man sich

1, unter a die Linie A B
2, unter b die Linie B C
3, unter c den Theil der Linie B C zwischen dem Perpendikel s und dem Punkt c.
4, unter d den Theil der Linie A B welcher zwischen dem Perpendikel t und dem Punkt A liegt.

Dann verhält sich

$$p : a = t : d$$
$$p : s = b : d$$

$$a : s = b : t$$
oder $a : b = s : t$

Die dem stumpfen Winkel entgegenstehende Seite verhält sich zu der Seite C B, wie sich der Sinus des äußern Winkels s zu dem Sinus des entgegenstehenden innern Winkels verhält.

Seite 116. Zeile 15. st. Fig. 61. l. Fig. 62.
— — — 3. v. u. st. i o l. i c.
— 117. — 23. zwischen: wie und Abscisse, fällt weg sich.
— 118. — 10. st. c p l. c k.
— — — 16. st. Fig. 62. l. Fig. 63.
— 119. — 4. st. Fig. 63. l. Fig. 64.
— — von Z. 4. die ganze Seite ist besser wie folgt, zu beweisen.

Fig. 64. KC = AG, denn KC = ½ von KB und BG = ZCB. Da nun AB = BC, so ist KC = AG. folglich ist KA = CG. denn CA ist sich selbst gleich. CK = AG folglich ist CA + AG = CA + CK.

Die halbe Tangente EG bildet aber mit CG und ½ LC ein Dreieck und die andere Hälfte mit dem Perpendikel LE, die spitzen Winkel in E u. G. sind Wechselwinkel, und die an den Durchschneidungspunkten Scheitelwinkel, folglich sind die Seiten CG und EL einander gleich. Es muß daher die Linie LC im Mittelpunkte durchschnitten seyn; der Winkel E muß daher auch über dem Mittelpunkte der Linie EC liegen — und folglich der Scheitelwinkel des Dreiecks LCE seyn. Nun bildet aber eine Linie, die durch den Scheitelwinkel auf die Grundlinie geht, mit derselben rechte Winkel, folglich sind die Dreiecke, welche durch die Tangente GE, die Linie LC = LE und CE gebildet werden, rechtwinkelige Dreiecke, die zwei und zwey gleiche Seiten und einen gleichen Winkel haben, und folglich congruent sind. Es ist daher die Linie EC gleich LE, weil beide Linien gleichnamige Seiten congruenter Dreiecke sind. Nun ist aber CE gleich KA, d. i.,

der Radius Vector ist gleich der von ihrer Ordinate bis zur Direktrix verlängerten Absciffe.

Seite 120. Zeile 22. statt D A C, l. L A C.
— — — 32. st. Fig. 64. l. Fig. 65.
— 121. — 11. statt Z G l. I Z und statt I M l. B K.
— — — 21. st. E B G l. E K G.
— — — 22. st. A I B G l. E I B K, und st. I M G l. I B G.
— — — 23. st. I M A G l. H E K B.
— — — 25. st. I B E l. I H E.
— — — 26. st. I A E l. I H E.
— 122. — 4. st. I E U l. I E H.
— 124. über die 5te Zeile setze Fig. 4.
— — Zeile 7. bleibt weg III Fig. 25.
— 125. — 8. v. u. st. II. Fig. 4. l. Fig. 5.
— 126. — 11. v. u. st. auf dem l. auf der.
— 127. — 6. st. II. Fig. 4. l. II. Fig. 30. u. 31.
— 129. — 1. st. Fig. 3. setze Fig. 2.
— 130. — 7. v. u. nach: Hälfte, setze: C.
— 131. — 16. st. b und d setze man B und E.
— — — 19. nach Fig. 6. setze a.
— — — 4. v. u. setze vor Fig. 6 b.
— 132. — 10. bleibt weg Fig. 3.
— 133. — 1. st. gleichseitiges l. gleichschenkliges.
— 134. — 9. st. Fig. 8. l. Fig. 9.
— 135. — 15. st. Fig. 34. l. Fig. 10.
— 136. — 20. st. dem Winkel l. in dem.
— — die ganze Auflösung der Aufgabe 5) ändere man so ab: Die drei Seiten eines Dreiecks sind anzusehen, als drei Tangenten des gesuchten Kreises. Zwey vereinigte Tangenten bilden einen Winkel A D B. Diesen Winkel theile ich in zwey gleiche Theile durch D C, dadurch wird auch der zwischen ihnen gedachte Bogen in zwei gleiche Theile getheilt, und folglich auch die ganze Peripherie. Wird aus der Mitte des Winkels D A B eine gerade Linie A C den zwischen ihnen gedachten Bogen in zwei gleiche Theile theilen und folglich auch die ganze Peripherie. Es sind daher die Theilungslinien der Winkel Secanten, welche die Peripherie in zwey gleiche Theile theilen. Diese sind aber

Diameter des Cirkels. Diameter des Cirkels können sich nur im Centro durchschneiden. Folglich ist der Durchschneidungspunkt C der Diameter des Cirkels.

Seite 138. Zeile 6. v. u. st. folglich, setze: Denn.
— 139. — 9. v. u. st. Linien l. Linie.
— 140. — 21. st. III Fig. 17. l. Tab. II. Anhang zu Curs. II. und III. Fig. 18.
— 143. — 4. st. im Cirkel l. in den Cirkel.
— 144. — 1. st. a d e = A D E, a d g = A D G, a g b = A G B, l. a d e ∾ A D E, a d g ∾ A D G, a g b ∾ A G B.
— — — 11. v. u. st. B C ∾ B E.
— 145. Zu Fig. 24. ist nur der Winkel G A E zu zeichnen, und der äußere Winkel x zu bemerken r und s kommen an das Trapezion C B A D. x und u werden gleich gemacht. Der innere Winkel B A D wird mit s, der äußere mit r bezeichnet.
Seite 147. Zeile 1. st. Fig. 27. l. Fig. 28.
— — nach Zeile 10. setze Fig. 29.
— — Zeile 12 und 5. v. u. st. l l. I.
— 148. — 13. st. D E D l. D E I, nach Z. 4. setze Fig. 30.
— 151. — 13. nach: D, setze: der Höhe nach.
— 152. — 20. st. auf die l. auf der.
— 153. — 9. In Fig. 3. setze an die unterste Ecke zur Linken A, an die zur rechten B.
— 157. — 17. st. dem Theile l. der Linie.
— — — 18. st. G B l. G A.
— 160. — 6. st. hierauf gefundene l. hier aufgefundenen.
— 161. die beiden untersten Zeilen sind Anmerkung.
— 162. Zeile 15. v. u. st. I D l. B D.
— 164. — 7. v. u. st. c l. C.
— 168. — 1. v. u. st. einem Dreiecke l. einem Parallelogramme, und Z. 2. st. jedes Parallelogramm l. jedes Dreieck.
— 169. — 25 bis 38 ist Anmerkung und gehört nicht in dem Text.

Seite 169 Zeile 5. v. u. st. verbinde l. gewinnt oder verliert.

— 170. — 24. nach L C B u. s. f. mache man folgenden Zusatz: Wenn die Dreiecke ähnlich sind, so stehen ihre Seiten in einem gleichen Verhältnisse. Dreiecke von verschiedener Größe verhalten sich so, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen. Stehen alle Seiten im Verhältnisse, so müssen auch die Höhen im Verhältnisse stehen. Wenn ich daher die Producte einer Linie nehme, so müssen die natürlich in demselben Verhältnisse stehen, als wie die Producte aus Grundlinie und Höhe (der beiden Linien). Daraus folgt:

Aehnliche Dreiecke verhalten sich so, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Seite 171. Zeile 9. v. u. st. c d q l. c g q.

— — — 5. v. u. st. k p f l. a p F.

— 172. — 6. st. einer l. eine Linie, d. h. die Breite des Dreiecks würde so unendlich gering seyn, daß sie nicht mehr von einer Linie zu unterscheiden seyn würde.

Seite 175. Zeile 5. v. u. bleibt weg der.

— 176. — 13. v. u. st. Fig. 26. l. Fig. 27.

— 179. — 11. st. L C + A C l. L C × A C.

— — — — st. Radius l. Diameter.

— 180. — 15. O bedeutet Cirkel.

NB. Aus dem Satze e folgt, daß der Cirkel A B C, welcher D F zum Radius hat, gleich sey dem Ringe, oder dem Unterschiede G I welcher zwischen den beiden Cirkeln sich befindet welche D G und D I zu Radien haben.

Seite 182. Zeile 6. st. AC^2 l. $2AC^2$.

— 185. — 2. v. u. vor: concentrischen, setze: andern.

— 187. — 1. streiche aus: und aus der Verlängerung.

— — — 3. nach: Verlängerung, setze man hinzu: und der halben Linie.

— 189. — 8. nach DF^2 setze $+ KF^2$.

Seite 190. Zeile 16. nach: Quadrate, setze hinzu: die gleich sind den Quadraten.
— 191. — 17. st. A D = I B entgegenstehen, den Segmente mit der ganzen Basis l. A D das Quadrat des andern Segments D C.
Seite 191. Zeile 20. nach: Seiten, setze: B C. hinzu.
— 193. — 4. st. A C × A C l. 2 De × A C.
— — — 12. st. Ae l. 2 De.
— — — 14. st. Ae l. De.
— — — 18. st. Ae l. De.
— — — 22. st. Ae l. De.
— 205. — 7. v. u. nach: Theilen, setze hinzu: derselben.
— 208. — 15. st. I l. E.
— 212. — 8. st. E D² l. C D².
— 213. — 8. st. L D² l. C D².

Fig. 1.
2.
3.
4.
5
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.

48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
c d e f a b
93.
94.
95.
96.
97.
98.

Fig. 116 bis 122 findet man im Apparat

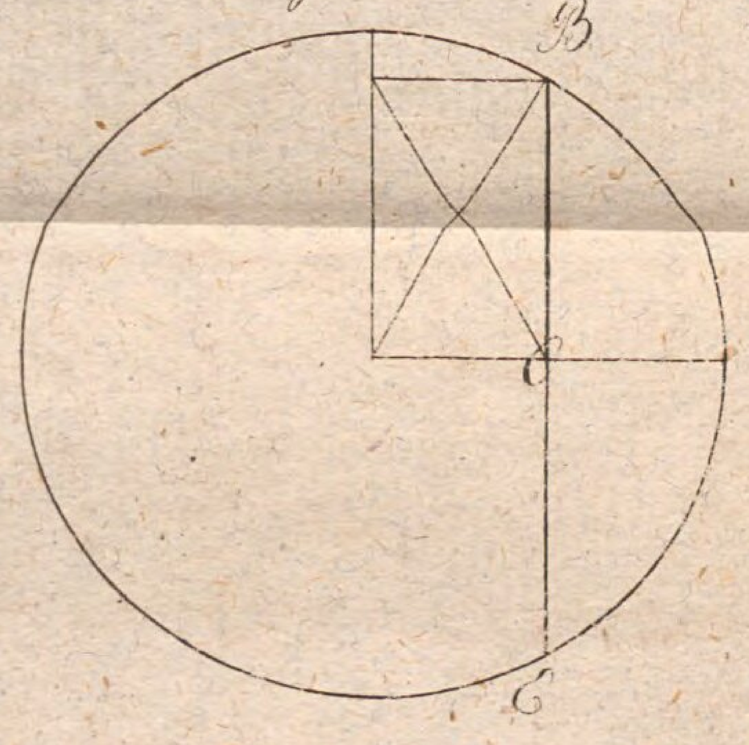
Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
o
s
p r
18.
19.
20.

21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.

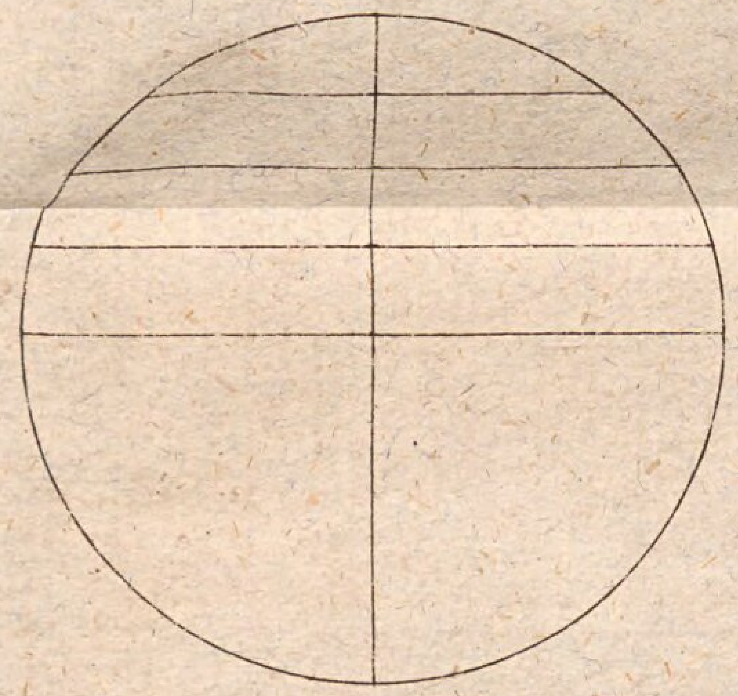
Fig. 1.
A e g i l B
C f h k m D
2.
A r p s B
C o x t D
3.
A D h g k i C B
4.
5.
n o
r m
6.
a d e
c b f
7.
8.
9.
10.

Fig. 11.
A
B
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
D
A
C
20.
A
C
B
21.
22.
23.

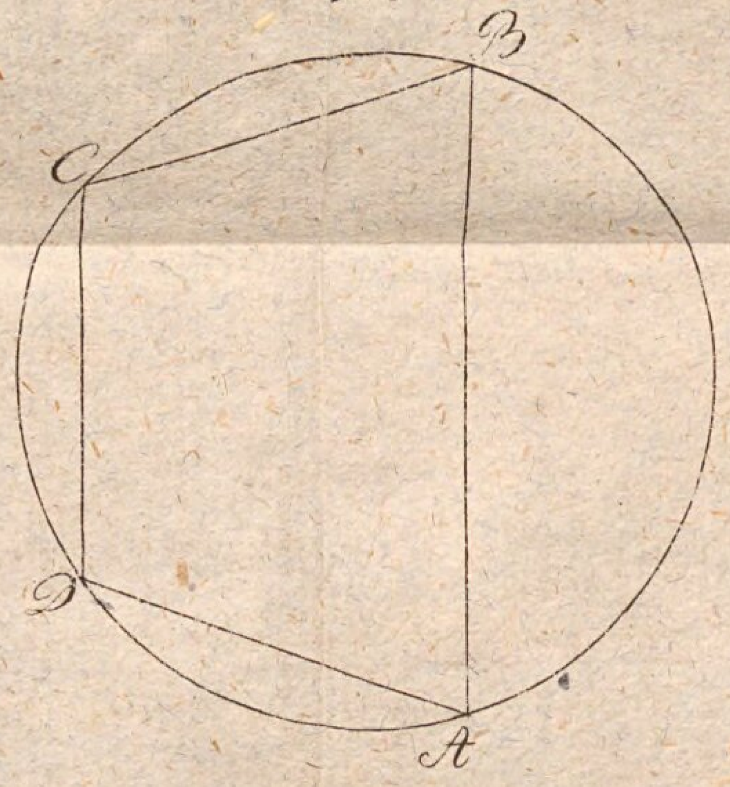
Fig. 24.



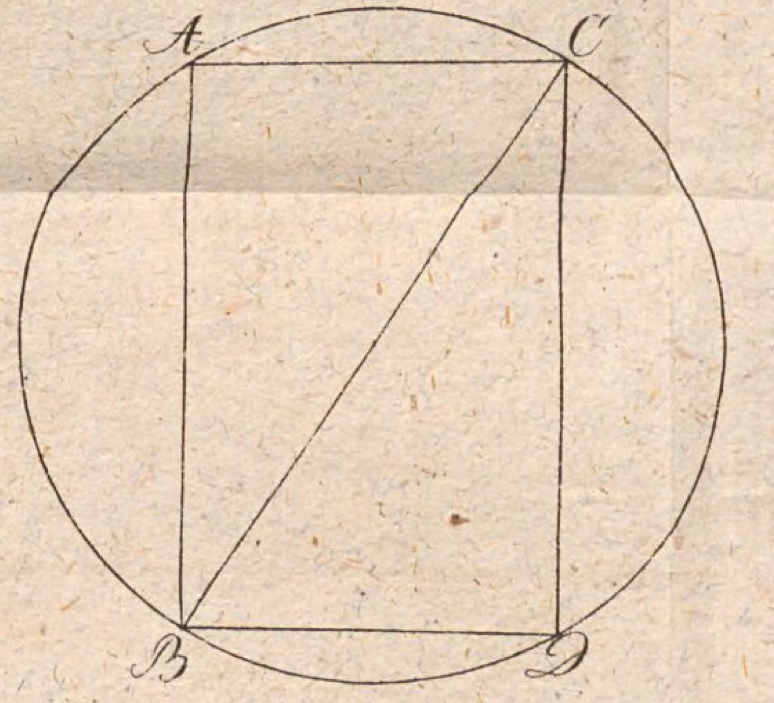
25.



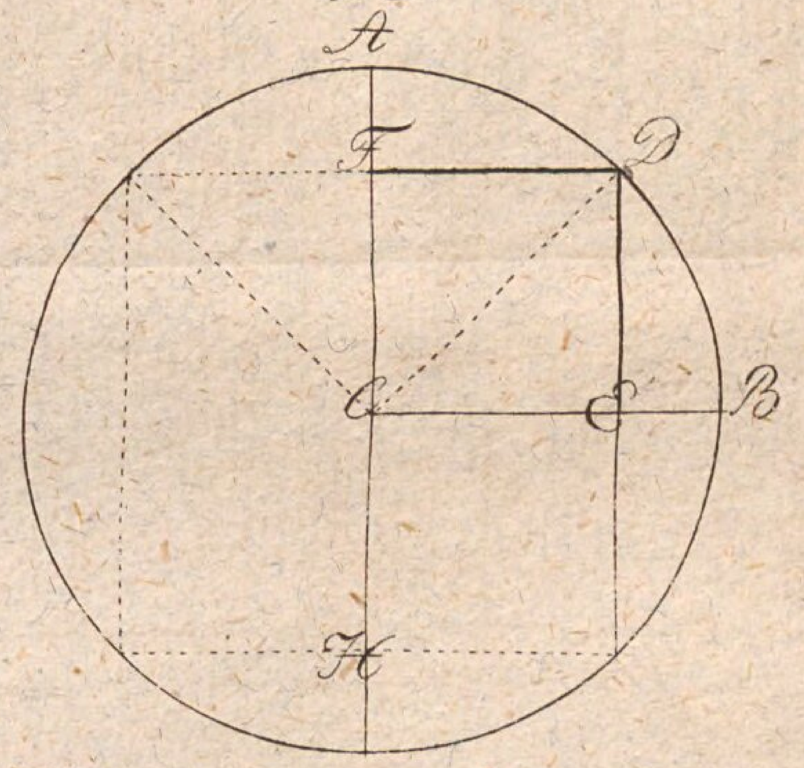
26.



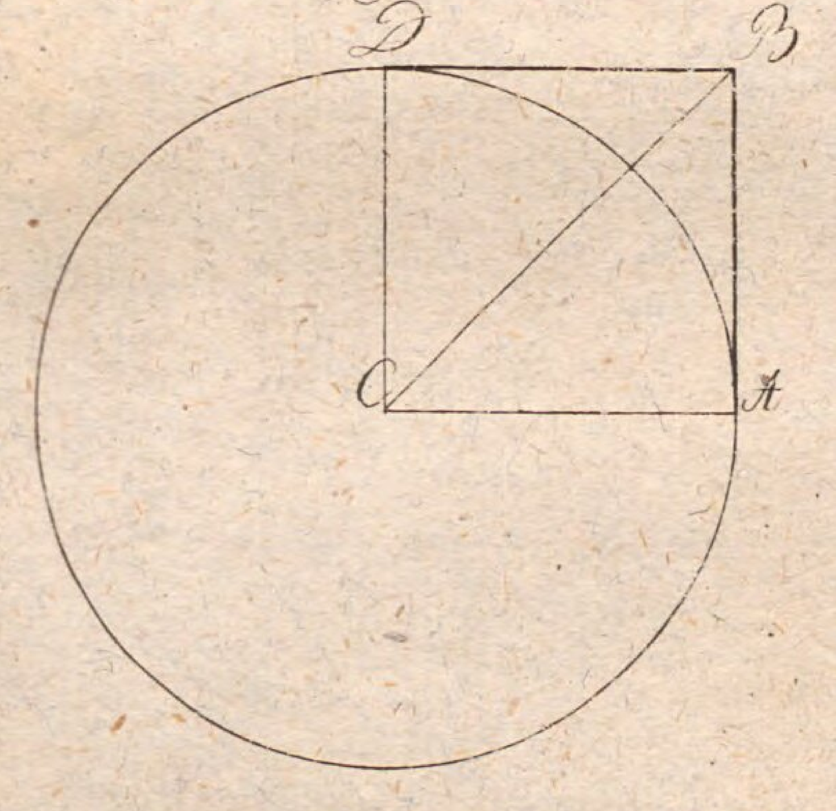
27.



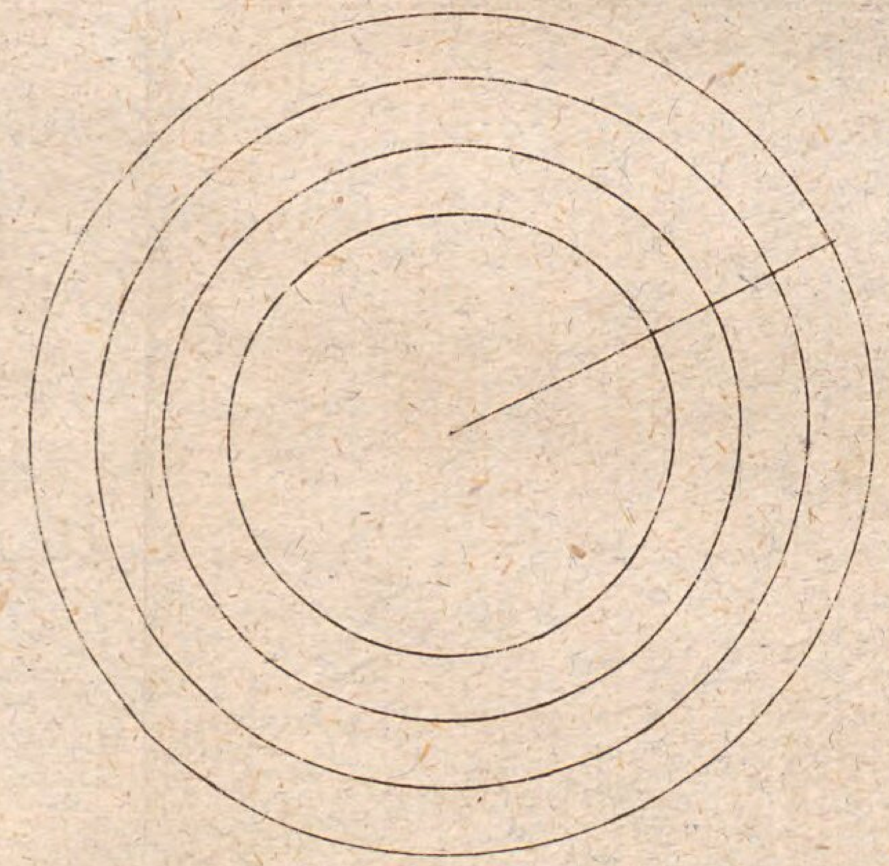
28.



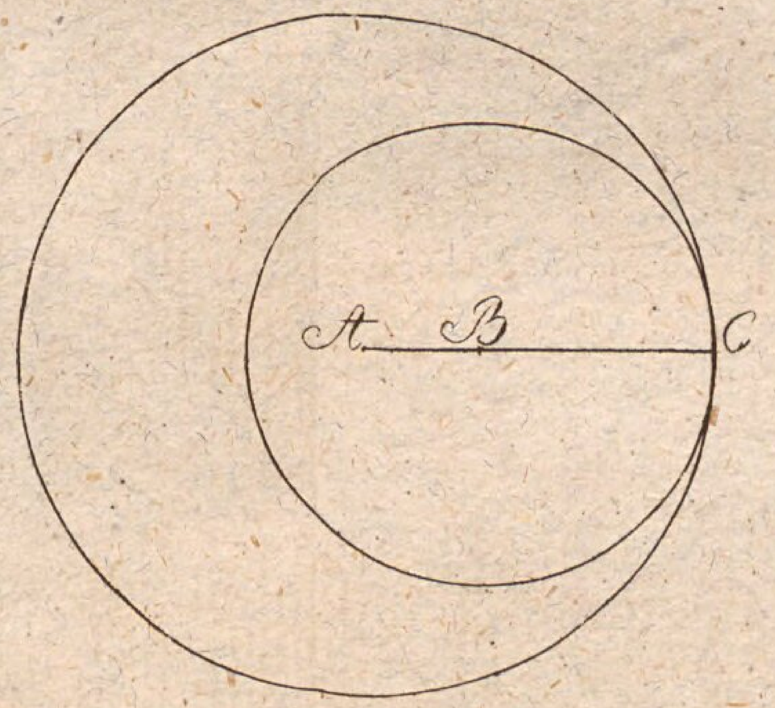
29.



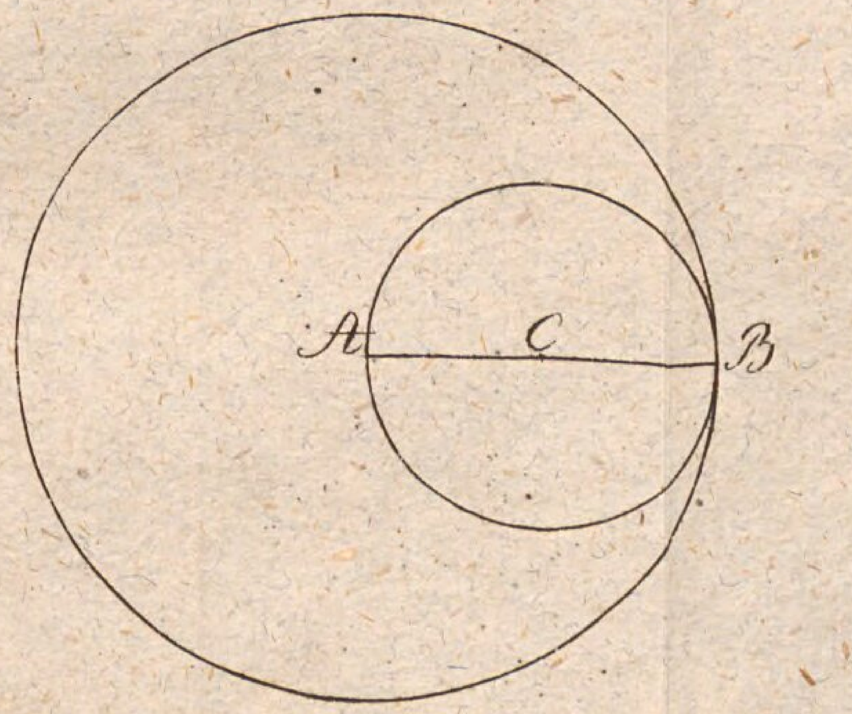
30.



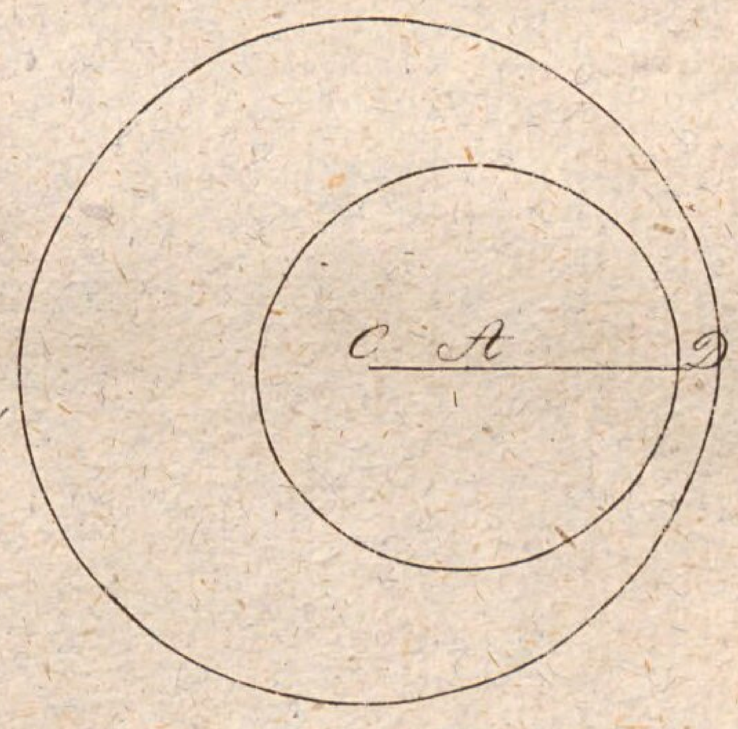
31.



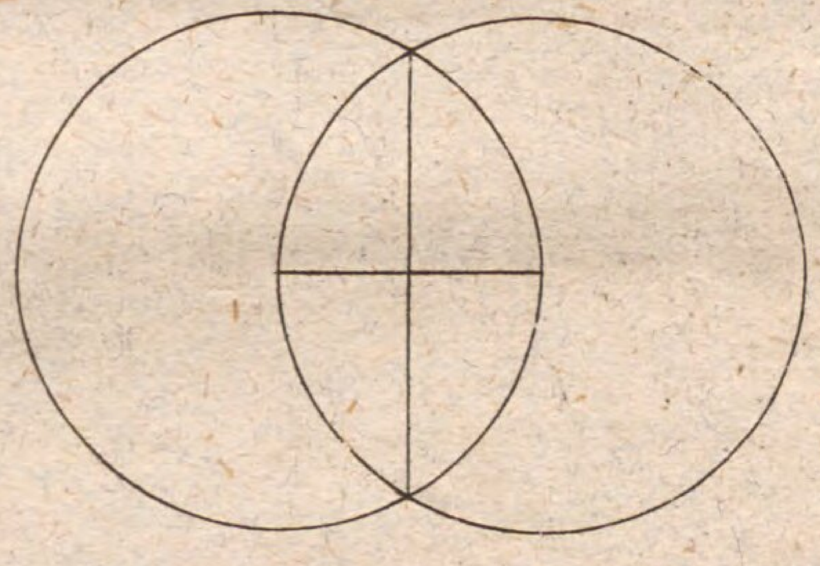
32.



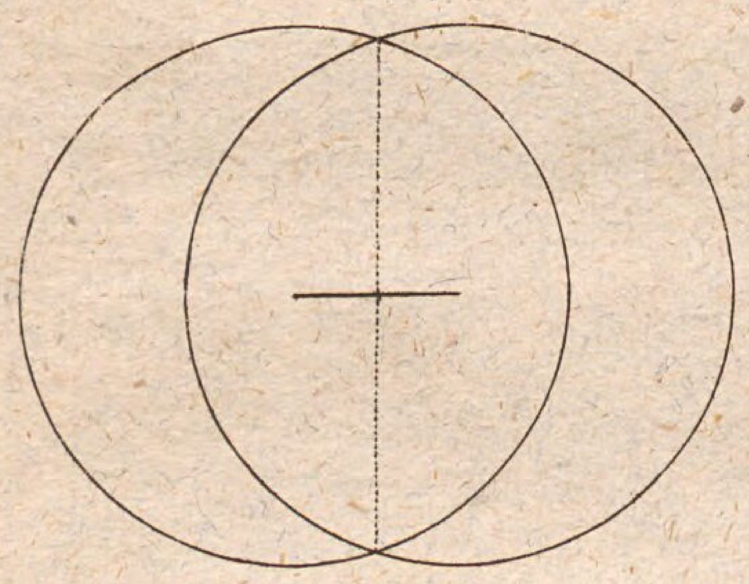
33.



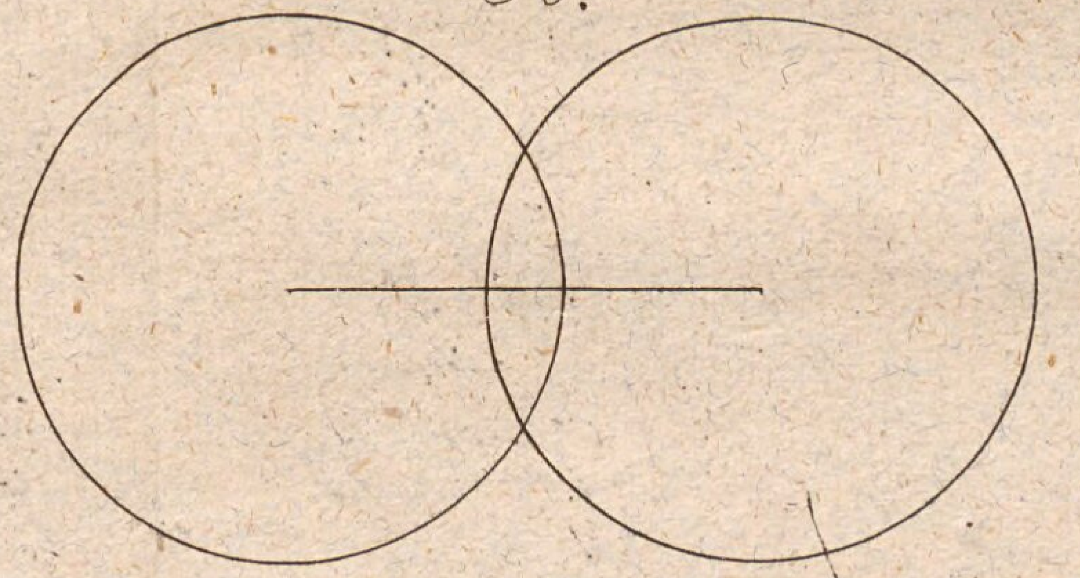
34.



35.



36.



37.

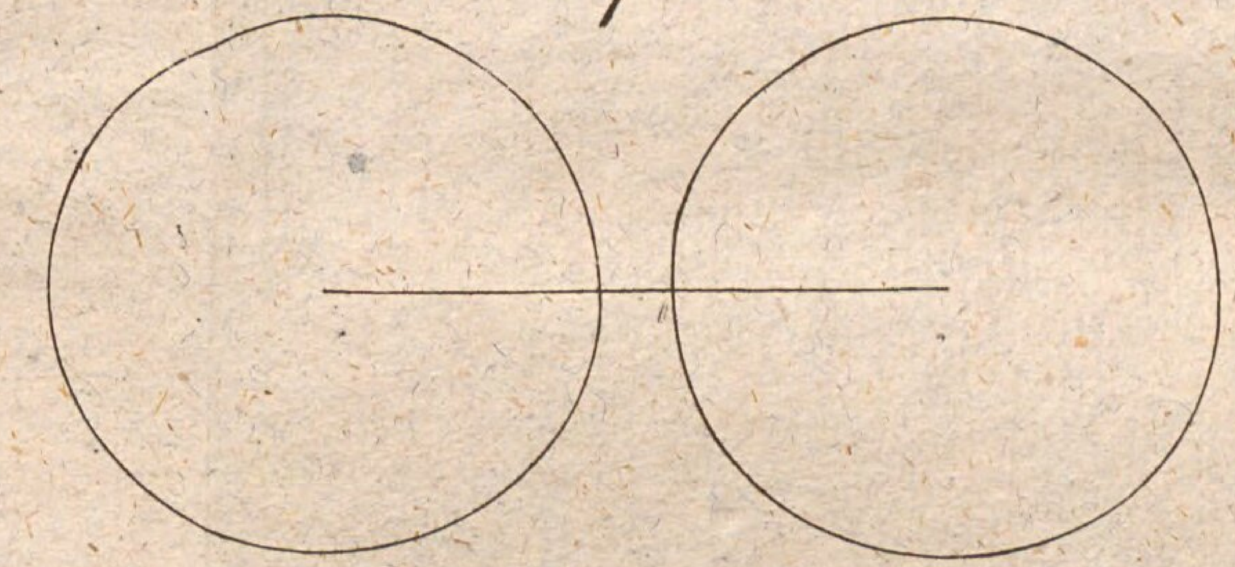


Fig. 38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.

Fig. 54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.

Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

Fig. 13.
14.
15.
16.a
16.b
17.
18.
19.
20.
21.a
21.b
22.
23.

Fig. 24.
25.
26.
27. a.
27. b.
28.
29.
30.
31.

32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
Fig. ∞
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.

Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.a
6.b
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.a
17.b

18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.

Fuc

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Tillich, Ernst,

Lehrbuch der Geometrie mit Kupfern

Leipzig 1807

Math.p. 580 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082957-5